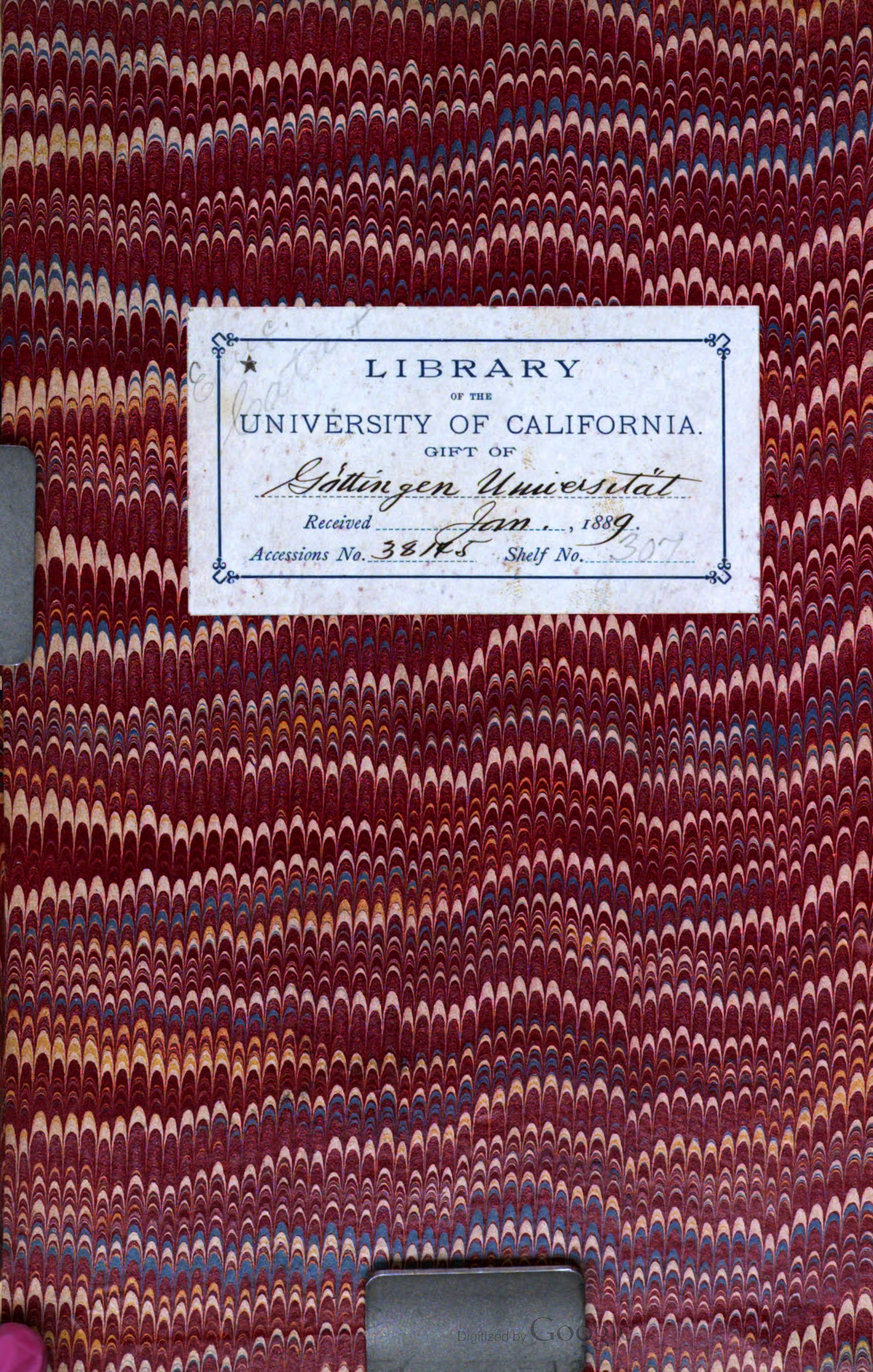



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Göttingen Universität
Received Jan., 1889.
Accessions No. 38145 Shelf No.



Untersuchung über die Grenzen,

zwischen welchen

Unduloide und Nodoide,

die von zwei festen Parallelkreisflächen begrenzt sind,

bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche

besitzen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

von

Gustav Hormann,

aus Goslar.



Göttingen,

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.

1887.



Die Untersuchung über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide, die von zwei Parallelkreisflächen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen, hat nicht allein ein mathematisches, sondern auch ein hervorragend physikalisches Interesse. Unduloide und Nodoide sind nämlich diejenigen Rotationsflächen, die unter gewissen Umständen von der freien Begrenzung einer Flüssigkeit, welche von zwei Parallelkreisflächen begrenzt ist, gebildet werden, wenn sie dem Einflusse der Schwere entzogen ist. Die Gestalt, welche eine Flüssigkeit annimmt, die allein den in ihr thätigen molekularen Kräften überlassen ist, hat besonders Plateau experimentell untersucht, einmal indem er eine Ölmasse in ein Gemisch von Alkohol und Wasser von demselben specifischen Gewichte brachte, sodass die Wirkung der Schwere auf dieselbe aufgehoben wurde, dann auch, indem er Seifenblasen bildete, welche so dünn sind, dass man den Einfluss der Schwere auf die Gestalt derselben vernachlässigen kann. Er hat sich hiermit während einer Reihe von Jahren beschäftigt und die anfangs in verschiedenen Serien veröffentlichten Resultate schliesslich in einem besonderen Werke „Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires“ niedergelegt. Plateau hat sich auch specieller mit den Rotationskörpern beschäftigt und in zwei besonderen Kapiteln ebenfalls die Stabilität derselben behandelt. Während er experimentell verschiedene Fälle untersucht, gelingt ihm eine theoretische Erklärung eigentlich nur für den Cylinder. Er giebt aber gleichzeitig in § 419 an, wie man auf rein mathematischem Wege die Frage vollständig entscheiden kann. Die Flächen, um welche es sich handelt, sind Flächen konstanter mittlerer Krümmung, welche letztere zugleich auch die Eigenschaft haben, dass sie innerhalb gewisser Grenzen unter allen ihnen unendlich benachbarten, mit Zuziehung zweier als unveränderlich betrachteten Kreisflächen dasselbe vorgeschriebene Volumen begrenzenden Flächen ein Minimum der Oberfläche darbieten. Nun ist das Gleichgewicht der Flüssigkeit nur so lange stabil, als die betreffenden

1*

Körper wirklich ein Minimum der Oberfläche besitzen. Man hat also nur nötig, die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen der betreffende Rotationskörper ein Minimum der Oberfläche besitzt, und erhält damit zugleich die Grenzen der Stabilität.

Der Ausdruck Minimum ist hier nicht im absoluten Sinne zu nehmen, sondern in dem, dass die Oberfläche kleiner ist, als alle benachbarten mit denselben festen Kreisflächen als Grenzen, welche dasselbe Volumen einschliessen, wobei als benachbarte Flächen alle angesehen werden, welche sich innerhalb eines gewissen Raumes befinden, in dem die erste Fläche liegt.

Nun lässt sich die Untersuchung zunächst mit Hülfe der von Herrn Weierstrass gegebenen Entwicklung der Variationsrechnung für den Fall einer unabhängigen Variabeln durchführen. Man erhält dann aber nur die Gewissheit, dass die gefundene Rotationsfläche A, deren Oberflächeninhalt mit α bezeichnet werden möge, kleinere Oberfläche hat, als alle benachbarten Rotationsflächen, welche mit den festen Kreisen ein gleiches Volumen begrenzen. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die Rotationsfläche, innerhalb der bestimmten Grenzen, ebenfalls kleinere Oberfläche hat, als eine benachbarte Fläche, welche keine Rotationsfläche ist. Der Beweis hierfür ist enthalten in einer Abhandlung von Herrn H. A. Schwarz „Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens", veröffentlicht in Nr. 1 des Jahrganges 1884 der Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, in der Formel II. b des § 3. Hiernach kann man, falls eine Fläche B, deren Oberflächeninhalt β sei, nicht eine Rotationsfläche mit der x-Achse als Rotationsachse ist, immer eine Rotationsfläche mit dieser Achse herstellen, welche denselben Körperinhalt begrenzt und kleinere Oberfläche hat. Wenn man statt jeder Schnittfläche senkrecht zur x-Achse einen Kreis mit gleichem Flächeninhalte nimmt, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, so erhält man eine Rotationsfläche C, welche denselben Körperinhalt hat, während ihre Oberfläche γ nach der betreffenden Formel kleiner ist als β. Wenn die Rotationsfläche C nicht identisch ist mit der Fläche A, so hat sie als benachbarte Rotationsfläche grössere Oberfläche, und wenn sie identisch mit ihr ist, so sind die Oberflächen gleich. Es gelten daher die beiden Gleichungen

$$\beta > \gamma$$
$$\gamma \geqq \alpha,$$

aus welchen folgt

$$\beta > \alpha.$$

Es hat also auch jede benachbarte Fläche B, welche nicht Rotationsfläche ist, grössere Oberfläche als A; oder die letztere Fläche hat kleinere Oberfläche als alle benachbarten Flächen, welche unter Hinzunahme der festen Kreise ein gleiches Volumen begrenzen, besitzt also ein Minimum der Oberfläche im oben angegebenen Sinne.

Es müssen jetzt die Formeln der Variationsrechnung auf den vorliegenden Fall angewendet werden.

Bei den einfachern Aufgaben der Variationsrechnung handelt es sich darum, eine Kurve zu finden, welche so beschaffen ist, dass ein Integral einer Funktion, die nur von den Koordinaten jedes Punktes und der Richtung der Kurve in diesem Punkte abhängt, zwischen bestimmten Grenzen der Kurve genommen entweder einfach ein Maximum oder Minimum wird, oder ein Maximum oder Minimum wird unter der Voraussetzung, dass ein zweites Integral derselben Art einen vorgeschriebenen Wert hat. Herr Weierstrass sieht die Koordinaten x und y eines beliebigen Punktes der Kurve als Funktionen einer Grösse t an. Dann ist die Aufgabe, x und y so zu bestimmen, dass ein Integral

$$I^0 = \int_{t_0}^{t_1} F^0(x, y, x', y')\,dt$$

ein Maximum oder Minimum wird und zwar in dem zweiten Falle, der bei der vorliegenden Untersuchung allein in Betracht kommt, unter der Bedingung, dass ein zweites Integral derselben Form

$$I^1 = \int_{t_0}^{t_1} F^1(x, y, x', y')\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert hat. Es lässt sich aus einer solchen Funktion F, welche der Bedingung

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'}$$

genügt, eine Function F_1 bestimmen, welche den Gleichungen genügt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 y'^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'} = -F_1 x' y'$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_1 x'^2$$

Setzt man nun

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x'} + F_1\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right),$$

so liefert die Untersuchung der ersten Variation eine Differential gleichung

$$G^0 - \lambda G^1 = 0,$$

wobei λ eine Konstante ist, welcher genügt werden muss, damit die erste Variation des Integrals I^0 verschwindet. Setzt man

$$F = F^0 - \lambda F^1,$$

so kann man an Stelle der vorigen Differentialgleichung die einfachere

$$G = 0$$

setzen, wofür auch die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

benutzt werden können. Als Bedingung, die häufig von Wichtigkeit ist, ist noch zu nennen, dass $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sich nicht unstetig ändern dürfen.

Aus den Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergeben sich x und y als Functionen von t, λ und zwei Konstanten α und β, also

$$x = \varphi(t, \alpha, \beta, \lambda)$$

$$y = \psi(t, \alpha, \beta, \lambda).$$

Damit wirklich ein Maximum oder Minimum für das Integral zwischen bestimmten Grenzen eintritt, ist erforderlich, dass F_1 sein Zeichen innerhalb der Grenzen der Integration nicht ändert. F_1 darf im Falle des Minimums nicht negativ, des Maximums nicht positiv sein. Herr Weierstrass bezeichnet die Ableitungen der Funktionen φ und ψ nach t mit φ' und ψ', diejenigen nach α, β, λ mit φ_1, φ_2, φ_3; ψ_1, ψ_2, ψ_3 und setzt

$$\vartheta_\nu(t) = \psi'(t)\varphi_\nu(t) - \varphi'(t)\psi_\nu(t), \nu = 1, 2, 3,$$

$$\Theta_\nu(t) = \int G^1 \vartheta_\nu(t)\,dt, \nu = 1, 2, 3,$$

wobei sich als Kontrolle die Formeln anwenden lassen

$$\frac{d}{dt}\left\{F_1\left(\vartheta_2\frac{d\vartheta_1}{dt} - \vartheta_1\frac{d\vartheta_2}{dt}\right)\right\} = 0$$

$$\Theta_1(t) = F_1\left(\vartheta_3\frac{d\vartheta_1}{dt} - \vartheta_1\frac{d\vartheta_3}{dt}\right) + c_1$$

$$\Theta_2(t) = F_1\left(\vartheta_3\frac{d\vartheta_2}{dt} - \vartheta_2\frac{d\vartheta_3}{dt}\right) + c_2,$$

in welchen c_1 und c_2 Konstante sind. Ferner wird gesetzt

$$\Theta(t, t_0) = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0) & \vartheta_2(t_0) & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t) & \vartheta_2(t) & \vartheta_3(t) \\ \Theta_1(t) - \Theta_1(t_0) & \Theta_2(t) - \Theta_2(t_0) & \Theta_3(t) - \Theta_3(t_0) \end{vmatrix},$$

so ist $\Theta(t, t_0)$ eine Determinante, welche für $t = t_0$ den Wert 0 hat. Der Punkt der Kurve, welcher dem kleinsten Werte von t entspricht, für welchen $t - t_0$ positiv ist, und $\Theta(t, t_0)$ wieder gleich 0 wird, heisst nach der Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass der dem zu t_0 gehörigen Punkte konjugierte Punkt. Ein Maximum oder Minimum tritt dann nur ein, wenn ein Stück der Kurve genommen wird, in welchem der zum Anfangspunkt konjugierte Punkt nicht liegt. Der einzige Fall, für welchen noch nicht bewiesen ist, dass man nicht weiter als bis zum konjugierten Punkte gehen darf, ist der, in welchem $\Theta(t, t_0)$ für den konjugierten Punkt von gerader Ordnung unendlich klein wird.

Um die Determinante $\Theta(t, t_0)$ untersuchen zu können, setzt man

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \vartheta_2(t_0)\vartheta_3(t) - \vartheta_3(t_0)\vartheta_2(t) \\ f_2(t) &= \vartheta_3(t_0)\vartheta_1(t) - \vartheta_1(t_0)\vartheta_3(t) \\ f_3(t) &= \vartheta_1(t_0)\vartheta_2(t) - \vartheta_2(t_0)\vartheta_1(t) \end{aligned}$$

$$H = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0) & \vartheta_2(t_0) & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t) & \vartheta_2(t) & \vartheta_3(t) \\ \vartheta_1'(t) & \vartheta_2'(t) & \vartheta_3'(t) \end{vmatrix},$$

dann ergiebt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{\Theta(t, t_0)}{f_3(t)} = F_1(t)\left(\frac{H}{f_3(t)}\right)^2.$$

Dabei ist zu bemerken, dass $f_3'(t)$ nicht gleichzeitig mit $f_3(t)$ gleich 0 werden kann, und wenn $f_3(t)$ gleichzeitig mit $\Theta(t, t_0)$ verschwindet, so müssen auch $f_1(t)$ und $f_2(t)$ verschwinden. Der Fall, wo $\Theta(t, t_0)$ für einen Wert von t von gerader Ordnung unendlich klein wird, tritt nur ein, wenn $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ gleichzeitig 0 werden, und zugleich $\frac{d\Theta(t, t_0)}{dt}$ gleich 0 ist.

Als letzte Bedingung für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums ist noch zu nennen, dass eine Funktion

$$\begin{aligned} E(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q}) &= F(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(1)}(x, y, p, q)\bar{p} - F^{(2)}(x, y, p, q)q \\ &= (p\bar{q} - q\bar{p})^2 \int_0^1 F_1(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(1 - \varepsilon)\,d\varepsilon \end{aligned}$$

ihr Zeichen nicht wechselt und auch nicht im ganzen Verlaufe der Kurve gleich 0 ist, wobei

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = F^{(1)}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = F^{(2)}$$

gesetzt ist, p, q die Richtungscosinus der Tangente der der Differentialgleichung genügenden Kurve im Punkte x, y und $\bar{p}, \bar{q}$ diejenigen der Tangente einer beliebigen Kurve in demselben Punkte bedeuten, und

$$\begin{aligned} p_\varepsilon &= p + \varepsilon(\bar{p} - p) \\ q_\varepsilon &= q + \varepsilon(\bar{q} - q) \end{aligned}$$

ist. Diese letzte Bedingung ist sicher erfüllt, wenn F_1 nicht allein für die der Kurve angehörigen Werte x', y', sondern für beliebige Werte dieser Grössen sein Zeichen nicht ändert. Wenn dann von einer der Differentialgleichung genügenden Kurve ein Stück genommen wird, in welchem der dem Anfangspunkte konjugierte Punkt nicht vorkommt, wenn ferner F_1 und E ihre Zeichen nicht ändern und entweder beide negativ, oder beide positiv sind, so hat man im ersten Falle ein Maximum, im zweiten ein Minimum in dem Sinne, dass für alle der Kurve benachbarten Kurven bei demselben Werte des zweiten Integrals das erste Integral im ersten Falle einen kleineren, im zweiten einen grösseren Wert besitzt, als für die Kurve selbst.

Es sollen nun die vorstehenden Formeln auf den Fall der kleinsten Rotationsfläche angewendet werden, vorausgesetzt dass das Volumen, welches durch die Fläche und zwei feste Kreise, die senkrecht zur Rotationsachse stehen, eingeschlossen wird, konstant ist. Es sei die x-Achse die Rotationsachse und y die Koordinate der Meridiankurve der Rotationsfläche, so ist die Oberfläche, welche ein Minimum werden soll, wenn x und y als Funktionen von t gedacht werden,

$$J^0 = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

während der Inhalt, welcher unverändert bleiben soll, dargestellt wird durch

$$J^1 = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2 x'\, dt.$$

Es ist daher in diesem Falle

$$F^0 = 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}$$
$$F^1 = \pi y^2 x'$$
$$F = F^0 - \lambda F^1 = 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2} - \lambda\pi y^2 x'.$$

Man erhält

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{2\pi y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \lambda\pi y^2 = 2\pi y\frac{dx}{dl} - \lambda\pi y^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi y y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 2\pi y\frac{dy}{dl},$$

wobei l die Bogenlänge bedeutet. Da $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sich nicht unstetig ändern dürfen, so folgt, dass auch $\frac{dx}{dl}$ und $\frac{dy}{dl}$ sich stetig ändern vielleicht mit Ausnahme des Falles, wo y gleich 0 wird. Da die Funktion F von x unabhängig ist, so ist $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Man wird deshalb vorteilhaft die Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

anwenden. Es folgt dann

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{2\pi y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \lambda\pi y^2 = \text{const.},$$

wobei die Konstante stets dieselbe sein muss, weil $\frac{\partial F}{\partial x'}$ sich nicht unstetig ändern kann. Um den Faktor π wegzuschaffen, giebt man zweckmässig der Konstanten die Form $\alpha\pi$ und erhält dann

$$\frac{2yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \lambda y^2 = \alpha$$

Es möge nun als unabhängige Variable die Bogenlänge l eingeführt werden, so ist, wenn man von $\lambda = 0$ oder $\alpha = 0$ absieht,

$$2y\frac{dx}{dl} - \lambda y^2 = \alpha$$
$$\frac{dx}{dl} = \frac{\alpha + \lambda y^2}{2y}$$
$$\left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\alpha + \lambda y^2}{2y}\right)^2$$
$$= \frac{4y^2 - (\alpha + \lambda y^2)^2}{4y^2}$$

$$\frac{dy}{dl} = \pm \frac{\sqrt{2(2-\alpha\lambda)y^2-\alpha^2-\lambda^2y^4}}{2y}$$

$$dl = \pm \frac{2y\,dy}{\sqrt{2(2-\alpha\lambda)y^2-\alpha^2-\lambda^2y^4}}$$

$$= \pm \frac{2y\,dy}{\sqrt{\left(\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda}\right)^2-\alpha^2-\left(\lambda y^2-\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda}\right)^2}}$$

$$dl = \pm \frac{1}{\lambda}\frac{d\left(\lambda y^2-\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{4}{\lambda^2}(1-\alpha\lambda)-\left(\lambda y^2-\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda}\right)^2}}$$

$$l-l_0 = \mp\frac{1}{\lambda}\arccos\frac{\lambda^2y^2-(2-\alpha\lambda)}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}$$

$$\cos\{\lambda(l-l_0)\} = \frac{\lambda^2y^2-(2-\alpha\lambda)}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}$$

$$y^2 = \frac{2-\alpha\lambda}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0)\}$$

$$y = \sqrt{\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0)\}}$$

Dabei ist das positive Zeichen der Quadratwurzel zu nehmen. Es ist dann ferner

$$\frac{dx}{dl} = \frac{\alpha+\lambda y^2}{2y} = \frac{\alpha}{2y}+\frac{\lambda}{2}y$$

$$x = \beta+\frac{\alpha}{2}\int\frac{dl}{\sqrt{\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0)\}}}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\sqrt{\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0)\}}\,dl$$

Die beiden Integrale in dem Ausdrucke für x sind elliptische Integrale und zwar das erste eines ersten, das zweite ein solches zweiter Art. Diese sollen umgeformt werden. Es werde gesetzt

$$v = \int\frac{dl}{\sqrt{\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0\}}}$$

$$= \int\frac{dl}{\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2-\frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\sin^2\left\{\frac{\lambda}{2}(l-l_0)\right\}}},$$

ferner

$$\sin^2\left\{\frac{\lambda}{2}(l-l_0)\right\} = z,$$

so folgt

$$\sin\left\{\frac{\lambda}{2}(l-l_0)\right\}\cos\left\{\frac{\lambda}{2}(l-l_0)\right\}\lambda\,dl = dz$$

$$dl = \frac{1}{\lambda}\frac{dz}{\pm\sqrt{z(1-z)}}$$

$$v = \frac{1}{\lambda}\int\frac{dz}{\pm\sqrt{z(1-z)\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2-\frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\,z\right]}}.$$

Da diejenigen Werte, für welche der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen gleich Null wird, der Grösse nach geordnet

$$\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}},\ 1,\ 0$$

sind, so führt man ein

$$z-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}} = m(s-e_1)$$

$$z-1 = m(s-e_2)$$

$$z = m(s-e_3).$$

Man erhält daraus durch Subtraktion:

$$\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}} = m(e_1-e_3)$$

$$\frac{(1-\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}} = m(e_1-e_2)$$

$$1 = m(e_2-e_3).$$

Will man nun erreichen, dass

$$e_1-e_3 = 1$$

wird, so hat man zu setzen

$$m = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}.$$

Es wird dann

$$v = \frac{1}{\lambda}\int\frac{m\,ds}{\pm\sqrt{m^3\cdot\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2}(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

Es genügt dann s der Differentialgleichung

$$dv^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{m^2 ds^2}{m^2 \cdot \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2}(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

$$\left\{d\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2}v\right)\right\}^2 = \frac{ds^2}{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}.$$

Setzt man daher

$$\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2}v = u,$$

so ist

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

Dieser Differentialgleichung genügt die Funktion

$$s = \wp(u+u')$$

nach der Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass, wobei u' eine Konstante ist.

Die Grösse u soll nun als unabhängige Variable eingeführt werden. Der Wert $u = 0$ soll dem kleinsten Werte von y entsprechen. Dieser kleinste Wert tritt ein für $\lambda(l-l_0) = \pi$. Dann ist $z = 1$, also $s = e_2$, das heisst, es muss $u = \omega''$ genommen werden, und es ist

$$s = \wp(u+\omega'')$$

e_1, e_2, e_3 können aus den früheren Gleichungen berechnet werden, in welche der Wert von m eingesetzt werden muss, wenn man zu denselben noch die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

hinzunimmt. Es ist

$$e_1 - e_3 = 1$$

$$e_1 - e_2 = \frac{(1-\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} = \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}$$

$$e_2 - e_3 = \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}.$$

Man erhält dann

$$e_1 = \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$e_2 = -\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$e_3 = -\frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

Man sieht, dass e_1, e_2, e_3, also auch die $\wp$- und σ-Funktionen nur von dem Produkte $\alpha\lambda$ abhängen.

Es wird uun

$$z - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}} = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}[\wp(u+\omega'')-e_1].$$

Da nach den „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz“, woraus auch alle übrigen Formeln entnommen sind,

$$\wp(u+\omega'')-e_2 = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u - e_2} = -\frac{4\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\frac{\sigma^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}\wp(u+\omega'')-e_1 &= \wp(u+\omega'')-e_2+(e_2-e_1)\\ &= (e_2-e_1)\frac{\wp u - e_3}{\wp u - e_2}\\ &= -\frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$z - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}} = -\frac{\alpha^2\lambda^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cos\{\lambda(l-l_0)\}}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2-\frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cdot z},\end{aligned}$$

so erhält man

$$y = \sqrt{\frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1-\alpha\lambda}\cdot\frac{\alpha^2\lambda^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}}$$

$$y = \pm\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

Da $\sigma_3 u$ und $\sigma_2 u$ für reelle Werte von u nicht 0 werden, für $u = 0$ beide gleich 1 sind und stets reell bleiben, so wird $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ weder 0 noch unendlich und ist stets positiv. $1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}$ ist auch stets positiv. Da y auch positiv sein muss, so folgt, dass das positive Zeichen gilt, wenn α positiv ist, das negative, falls α einen negativen Wert hat.

Damit x als Funktion von u dargestellt werden kann, muss noch das elliptische Integral zweiter Art als Funktion von u berechnet werden. Es ist

$$\int \sqrt{\frac{2 - \alpha\lambda}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\cos\{\lambda(l - l^0)\}}\, dl$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int \frac{\sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\, z}\, dz}{\pm\sqrt{z(1 - z)}}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\cdot z}{\pm\sqrt{z(1 - z)\left[\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\, z\right]}}\, dz.$$

Es ist

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dz}{\pm\sqrt{z(1 - z)\left[\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\, z\right]}} = dv = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}\, du,$$

daher

$$\int \sqrt{\frac{2 - \alpha\lambda}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2}\sqrt{1 - \alpha\lambda}\cos\{\lambda(l - l_0)\}}\, dl$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})}{\lambda^2}\int [e_1 - \wp(u + \omega'')]\, du$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})}{\lambda^2}\left[e_1 u + \frac{\sigma'(u + \omega'')}{\sigma(u + \omega'')} - \eta''\right],$$

wobei die Konstante so bestimmt ist, dass das Integral für $u = 0$ auch gleich 0 ist. Da

$$\frac{\sigma'(u + \omega'')}{\sigma(u + \omega'')} - \eta'' = \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

ist, so hat man

$$x = \beta + \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,u + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\left(\frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u + \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)$$

$$x = \beta + \frac{4+\alpha\lambda}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} = \varphi(u,\alpha,\beta,\lambda)$$

$$y = \frac{\pm\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \psi(u,\alpha,\beta,\lambda)$$

y ist eine periodische Funktion von u, und zwar ist die hier in Betracht kommende reelle Periode des Argumentes gleich 2ω. Vermehrt man das Argument u um 2ω, so geht x über in die ursprüngliche Funktion vermehrt um

$$\frac{4+\alpha\lambda}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\omega + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\,2\eta.$$

Die Gestalt der Kurve bestimmt sich bei der Betrachtung des Differentialquotienten von x, welcher nachher berechnet werden muss, und soll dort besprochen werden.

Wenn ein Maximum oder Minimum eintreten soll, so darf F_1 sein Zeichen nicht wechseln. Es muss daher zunächst F_1 berechnet werden. Es war

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi y y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Durch Differentiation nach x' erhält man daraus

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} = -\frac{2\pi y y' x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}.$$

Also ist

$$F_1 = \frac{2\pi y}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}.$$

Da y stets positiv ist und die Quadratwurzel gleichfalls, so ist F_1 immer positiv. Ebenfalls ist die Bedingung, dass die Funktion $E(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})$ nicht negativ ist, erfüllt, denn F_1 ist nicht allein für die der Kurve angehörigen Werte von x' und y', sondern für beliebige Werte dieser Grössen positiv. Es tritt daher in dem vorliegenden Falle ein Minimum stets ein, wenn zwischen Anfangspunkt und Endpunkt nicht der zum Anfangspunkte konjugierte Punkt liegt, und der Endpunkt auch selbst nicht zum Anfangspunkt konjugiert ist. Von Wichtigkeit ist hier also nur die Theorie der konjugierten Punkte.

Um die Gleichung zu finden, welche den konjugierten Punkt

liefert, hat man zunächst die Ableitungen von x und y nach $u, \alpha, \beta, \lambda$ zu bestimmen. Es ist

$$\varphi' = \frac{4+\alpha\lambda}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} + \frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}$$

$$= \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} + \frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

Man hat

$$\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = \frac{\wp u - e_3}{\wp u - e_2} = 1 + \frac{e_2 - e_3}{\wp u - e_2}.$$

Für $u = 0$ ist $\wp u = \infty$, das heisst $\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = 1$. Wächst u von 0 bis ω, so nimmt $\wp u$ ab von ∞ bis e_1. $\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$ nimmt gleichzeitig zu bis

$$\frac{\sigma_3^2 \omega}{\sigma_2^2 \omega} = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2}$$

Wenn u von ω bis 2ω wächst, so nimmt $\wp u$ wieder zu von e_1 bis ∞. In jedem folgenden Intervalle $2n\omega$ bis $2(n+1)\omega$ werden dieselben Werte wieder angenommen. Der kleinste Wert von $\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$ ist daher 1 und der grösste $\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2}$. Man findet daraus die beiden äussersten Werte für φ', nämlich

$$\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} + \frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} = \frac{2\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

und

$$\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} + \frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\cdot\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

Diese beiden Ausdrücke haben gleiches Zeichen, wenn $\alpha\lambda$ positiv ist. In diesem Falle nimmt also x beständig zu oder beständig ab bei wachsendem u. Da y periodisch ab- und zunimmt, so erhält man dann eine wellenförmige Kurve, durch deren Rotation um die x-Axe das sogenannte Unduloid erzeugt wird. Ist dagegen $\alpha\lambda$ negativ, so haben beide Ausdrücke entgegengesetzte Zeichen. Es wird dann x anfangs abnehmen für wachsende Werte von u und dann wieder zunehmen, oder umgekehrt, sodass die Kurve eine Reihe von Schleifen enthält. Die durch Rotation dieser Kurve um die x-Achse erzeugte Fläche heisst Nodoid.

Man findet ferner

$$\pm \psi' = \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} \cdot \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma u \, \sigma_1 u}{\sigma_2 u \, \sigma_3 u}$$

$$= \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma u \, \sigma_1 u}{\sigma_2 u \, \sigma_3 u}$$

Um die Ableitungen von φ und ψ nach α und λ bilden zu können, hat man die Ableitungen der σ-Funktionen nach dem Produkte $\alpha\lambda$ zu bilden. Die Formeln, die hierzu nötig sind, findet man in einer Abhandlung von Herrn Weierstrass „Zur Theorie der elliptischen Functionen". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung vom 27. April 1882. Die betreffenden Gleichungen, welche dort mit (A) und (B) bezeichnet sind, lauten

$$2d'\sigma + 2\left(u\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \sigma\right)d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \tfrac{1}{12}g_2 u^2 \sigma\right)d_2 = 0$$

$$2d'\sigma_\lambda + 2u\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u}d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial n^2} + (\tfrac{1}{12}g_2 u^2 + e_\lambda)\sigma_\lambda\right)d_2 = 0, \; (\lambda = 1, 2, 3).$$

Dabei bedeuten $d'\sigma$ und $d'\sigma_\lambda$ die Differentiale von σ und σ_λ in Bezug auf ω, ω', und es ist

$$d_1 = \frac{-g_2^2\,dg_2 + 18g_3\,dg_3}{4(g_2^3 - 27g_3^2)} = -\tfrac{1}{12}\frac{d(g_2^3 - 27g_3^2)}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

$$d_2 = \frac{18g_3\,dg_2 - 12g_2\,dg_3}{4(g_2^3 - 27g_3^2)}.$$

Es müssen g_2 und g_3 aus e_1, e_2, e_3 berechnet werden.

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

$$= 2\left(\frac{4(2-\alpha\lambda)^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} + \frac{(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} + \frac{(2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\right)$$

$$= \frac{4(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}$$

$$g_3 = 4e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$$

$$= 4 \cdot \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} \cdot \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \cdot \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$= \frac{8(2-\alpha\lambda)(-32+32\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{27(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}$$

$$dg_2 = \frac{8(8-7\alpha\lambda-8\sqrt{1-\alpha\lambda}+\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}d\alpha\lambda$$

$$dg_3 = \frac{8(-32+44\alpha\lambda-11\alpha^2\lambda^2+32\sqrt{1-\alpha\lambda}-20\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}-\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda})}{9\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}d\alpha\lambda.$$

Daraus ergiebt sich

$$d_1 = \frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)}\, d\alpha\lambda$$

$$d_2 = -\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)}\, d\alpha\lambda.$$

Es müssen nun $d'\sigma_2$ und $d'\sigma_3$ berechnet werden. Dann muss noch $d'\sigma_2'$ bestimmt werden. Die Gleichung für dies letztere Differential erhält man, wenn man diejenige für $d'\sigma_\lambda$ nach u differentiiert. Dann wird

$$2d'\sigma_\lambda' + 2\left(u\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u}\right)d_1 + \left\{\frac{\partial^3\sigma_\lambda}{\partial u^3} + \left(\tfrac{1}{12}g_2u^2 + e_\lambda\right)\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u} + \tfrac{1}{6}g_2u\sigma_\lambda\right\}d_2 = 0.$$

Wenn man in der Gleichung für $d'\sigma_\lambda$ für λ den Wert 2 und für d_1 und d_2 die angegebenen Werte einsetzt und die Gleichung für $d'\sigma_2$ auflöst, so erhält man, indem man die Differentialquotienten der σ-Funktionen nach u mit σ', σ'' bezeichnet,

$$d'\sigma_2 = \left\{-u\sigma_2'\frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)} + \tfrac{1}{2}\left[\sigma_2'' + \left(\frac{16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{9(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^4}u^2 - \frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{3(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}\right)\sigma_2\right]\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)}\right\}d\alpha\lambda.$$

Ebenso findet man

$$d'\sigma_3 = \left\{-u\sigma_3'\frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)} + \tfrac{1}{2}\left[\sigma_3'' + \left(\frac{16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{9(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^4}u^2 - \frac{2 - \alpha\lambda + 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{3(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}\right)\sigma_3\right]\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)}\right\}d\alpha\lambda.$$

Aus der Gleichung für $d'\sigma_\lambda'$ erhält man

$$d'\sigma_2' = \left\{-(u\sigma_2'' + \sigma_2')\frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)} + \tfrac{1}{2}\left[\sigma_2''' + \left(\frac{16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{9(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^4}u^2 - \frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{3(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})}\right)\sigma_2' + \frac{2(16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2)}{9(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^4}u\sigma_2\right]\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)}\right\}d\alpha\lambda.$$

Mit Hülfe dieser Grössen kann man φ und ψ nach α und λ differentiieren. Es ist dann

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda})\lambda - (4+\alpha\lambda)\cdot\dfrac{-\lambda}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u + \frac{-\lambda}{\lambda 2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\,\frac{\sigma_2 u\,\dfrac{\partial\sigma_2' u}{\partial\alpha\lambda} - \sigma_2' u\,\dfrac{\partial\sigma_2 u}{\partial\alpha\lambda}}{\sigma_2^2 u}\,\lambda.$$

Es ist

$$\frac{\sigma_2 u\,\dfrac{\partial\sigma_2' u}{\partial\alpha\lambda} - \sigma_2' u\,\dfrac{\partial\sigma_2 u}{\partial\alpha\lambda}}{\sigma_2^2 u}$$

$$= -\left(u\,\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} + \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sigma_2''' u}{\sigma_2 u}\right.$$

$$+\left(\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u^2 - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\right)\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$\left.+\frac{2(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\right]\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}$$

$$+u\left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\left[\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u}\right.$$

$$\left.+\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u^2 - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\right]\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}$$

$$= -\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\,u\left[\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} - \left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2\right]$$

$$-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{8\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\left(\frac{\sigma_2''' u}{\sigma_2 u} - \frac{\sigma_2' u\,\sigma_2'' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\right)$$

$$+\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u.$$

Man findet nun

$$\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} - \left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2 = \frac{d}{du}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} = \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$\frac{\sigma_2''' u}{\sigma_2 u} - \frac{\sigma_2' u\,\sigma_2'' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} = \frac{d}{du}\,\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} = \frac{d}{du}\left\{\frac{d}{du}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{4\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\cdot 2\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + 2\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\left[\frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\right].$$

Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha\lambda}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} = -\frac{\alpha\lambda(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{8-8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2-4(2-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u-\frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}+\frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}.$$

Man erhält

$$\varphi_1 = \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u-\frac{\alpha\lambda(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{4(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}.$$

Ferner ist

$$\pm\psi_1 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}-\alpha\cdot\dfrac{-\lambda}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_2 u\dfrac{\partial\sigma_3 u}{\partial\alpha\lambda}-\sigma_3 u\dfrac{\partial\sigma_2 u}{\partial\alpha\lambda}}{\sigma_2^2 u}\,\lambda$$

Es ist

$$\frac{\sigma_2 u\dfrac{\partial\sigma_3 u}{\partial\alpha\lambda}-\sigma_3 u\dfrac{\partial\sigma_2 u}{\partial\alpha\lambda}}{\sigma_2^2 u} = -u\,\frac{\sigma_3' u}{\sigma_2 u}\,\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sigma_3'' u}{\sigma_2 u}+\left(\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u^2-\frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\right)\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\right]\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}$$

$$+\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\,u\,\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}-\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2'' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}+\left(\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\right)\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\right]\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}$$

$$= -\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\,u\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\right)$$

$$+\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\left(\frac{\sigma_3'' u}{\sigma_3 u}-\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u}\right)-\frac{1}{2\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

Man hat

$$\frac{\sigma_3' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} = \frac{d}{du}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

und

$$\frac{\sigma_3'' u}{\sigma_3 u}-\frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} = \frac{d}{du}\left\{\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u}-\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right\}+\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2$$

Da nun

$$\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} - \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} = \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u}{\sigma_2 u\, \sigma_3 u}$$

ist, woraus folgt

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} - \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right) = \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\left(\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{\sigma^2 u}{\sigma_3^2 u}\right)$$

$$= \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma_3^2 u} - \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u},$$

und da

$$\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\right)^2 + \frac{8\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u\,\sigma_2' u} + \frac{16(1-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma^2 u\,\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_3^2 u},$$

so ist

$$\frac{\sigma_3'' u}{\sigma_3 u} - \frac{\sigma_2'' u}{\sigma_2 u} = \frac{2(2-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} - \frac{2\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+ \frac{8\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u\,\sigma_2 u}.$$

Es ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial\alpha\lambda}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = -\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\, u\, \frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + \frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$- \frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u} + \frac{1}{\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Man erhält also schliesslich

$$\pm\psi_1 = -\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\, u\, \frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + \frac{4-3\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$- \frac{\alpha^2\lambda^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Die Differentiation von φ und ψ nach β ergiebt

$$\varphi_2 = 1$$
$$\psi_2 = 0.$$

Mit Hülfe der eben berechneten Ableitungen der Quotienten $\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$ und $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ nach $\alpha\lambda$ findet man ebenfalls leicht die Ableitungen von φ und ψ nach λ, nämlich

$$\varphi_3 = \frac{\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})\,\alpha - (4+\alpha\lambda)\left[1+\sqrt{1-\alpha\lambda}+\lambda\cdot\frac{-\alpha}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\right]}{3\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\, u$$

$$+ \frac{\lambda\cdot\frac{-\alpha}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}} - (1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{\lambda^2}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\alpha\lambda}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\cdot\alpha$$

$$= \frac{-16+14\alpha\lambda+3\alpha^2\lambda^2+6\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}u - \frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u} - \frac{(4-3\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}$$

und

$$\pm\psi_3 = -\frac{\alpha\cdot\dfrac{-\alpha}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} + \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\partial}{\partial\alpha\lambda}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\cdot\alpha$$

$$= -\frac{\alpha(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$-\frac{\alpha^3\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} + \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Nachdem so die Grössen φ', φ_1, φ_2, φ_3; ψ', ψ_1, ψ_2, ψ_3 berechnet sind, müssen die Funktionen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bestimmt werden. Es ist ϑ_1 gleich der Determinante $\psi'\varphi_1 - \varphi'\psi_1$. Die Elemente sind, wenn man das doppelte Vorzeichen, welches bei ψ' und ψ_1 auftritt, auf die andere Seite zu ϑ_1 nimmt,

1) $$\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

2) $$-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + \frac{4-3\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$-\frac{\alpha^2\lambda^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

3) $$\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} + \frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

4) $$\frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}u - \frac{\alpha\lambda(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u} - \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{4(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}.$$

Multipliciert man die Elemente der ersten Kolonne 1) und 3) mit

$$\frac{2-\alpha\lambda-\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha(1-\alpha\lambda)}u - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

und addiert dann zu den Elementen der zweiten Kolonne, so werden die letzteren

2) $$-\frac{4-3\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^2\lambda^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

4) $$\frac{2-\alpha\lambda}{6(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}u+\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$
$$-\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}.$$

Wenn man die Elemente der ersten Kolonne durch $\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$ dividiert und die der zweiten Zeile mit derselben Grösse multipliciert und dann für $\sigma^2 u\,\sigma_1^2 u$ den Wert ausgedrückt durch $\sigma_2 u$ und $\sigma_3 u$ einsetzt, so werden die Elemente

1) $$\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}$$

2) $$-\frac{4-3\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^2\lambda^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

3) $$\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}+\frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

4) $$\frac{2-\alpha\lambda}{6(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{16(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha\lambda(2-\alpha\lambda)}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{\alpha^3\lambda^3}{16(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^5 u}{\sigma_2^5 u}$$
$$-\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Multipliciert man die Elemente der ersten Zeile mit

$$-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}-\frac{\alpha\lambda}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

und addiert dann zu den Elementen der zweiten Zeile, so erhält man schliesslich die Elemente

1) $$\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}$$

2) $$-\frac{4-3\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^2\lambda^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

3) 0

$$4)\quad \frac{2-\alpha\lambda}{6(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2\lambda^2}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Daraus erhält man

$$\pm\vartheta_1=\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Da $\psi_2=0$, $\varphi_2=1$ ist, so ist

$$\vartheta_2=\psi'\varphi_2-\varphi'\psi_2=\psi'$$

$$\pm\vartheta_2=\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Es ist

$$\vartheta_3=\psi'\varphi_3-\varphi'\psi_3.$$

Zur Bestimmung von $\pm\vartheta_3$ hat man die Determinante aus den folgenden Elementen zu bilden

$$1)\quad \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3},\ \frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$2)\quad -\frac{\alpha(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}+\frac{\alpha}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$-\frac{\alpha^3\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^3 u}+\frac{\alpha}{\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$3)\quad \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}+\frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$4)\quad -\frac{16+14\alpha\lambda+3\alpha^2\lambda^2+6\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{(4-3\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})},\ \frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}.$$

Wenn man die Elemente der ersten Kolonne mit

$$\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\lambda(1-\alpha\lambda)}\,u-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\lambda(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

multipliciert und dann zu denjenigen der zweiten addiert, so werden letztere

$$2)\quad \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^3\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$4)\quad \frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{6\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u+\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_3' u}{\sigma_2 u}.$$

Dividiert man die Elemente der ersten Kolonne durch $\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$ und multipliciert die der zweiten Zeile mit derselben Grösse, so werden die Elemente, wenn man für $\sigma^2 u\,\sigma_1^2 u$ den Wert in $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ einsetzt,

$$1)\quad \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$2)\quad \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^3\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$3)\quad \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}+\frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$4)\quad \frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{6\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{16(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{\alpha^4\lambda^2}{16(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^5 u}{\sigma_2^5 u}$$

$$-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Multipliciert man die Elemente der ersten Zeile mit

$$-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}-\frac{\alpha\lambda}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

und addiert zu denen der zweiten Zeile, so werden schliesslich die Elemente

$$1)\quad \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$2)\quad \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^3\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$3)\quad 0$$

4) $$\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{6\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u}-\frac{\alpha\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{8(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}.$$

Man erhält

$$\pm\vartheta_3=\frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u}-\frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{2\alpha\,(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}.$$

Zur Berechnung der Determinante $\Theta(u, u_0)$ sind noch die Grössen $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$ erforderlich.

Diese waren gegeben durch die Gleichung

$$\Theta_\nu(u)=\int G^1\,\vartheta_\nu(u)\,du,$$

und es hatten sich für $\Theta_1(u)$ und $\Theta_2(u)$ ausserdem die Formeln ergeben

$$\Theta_1(u)=F_1\left(\vartheta_3\frac{d\vartheta_1}{du}-\vartheta_1\frac{d\vartheta_3}{du}\right)+c_1$$
$$\Theta_2(u)=F_1\left(\vartheta_3\frac{d\vartheta_2}{du}-\vartheta_2\frac{d\vartheta_3}{du}\right)+c_2,$$

sodass diese beiden Grössen auf zwei verschiedenen Wegen berechnet werden können. Es müssen die Grössen G^1 und F_1 als Funktionen von u bestimmt werden. Es war

$$F_1=\frac{2\pi y}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}=\frac{2\pi\psi}{\sqrt{\psi'^2+\varphi'^2}^3}$$

Man findet

$$\psi'^2+\varphi'^2=\left(\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}+\frac{\alpha^2\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\right)^2+\left(\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\right)^2$$
$$=\frac{\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}+\frac{2\alpha^3\lambda}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}+\frac{\alpha^4\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}$$
$$-\frac{\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}+\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{\alpha^4\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}$$
$$=\frac{4\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}.$$

Da $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ für reelle Werte von u stets positiv ist, so ist

$$\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} = \frac{\pm 2\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

und

$$F_1 = 2\pi \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}{8\alpha^2} \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma_3^2 u}.$$

Für G^1 gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F^1}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial F^1}{\partial x'} = G^1 y'$$

$$-2\pi y y' = G^1 y'$$

$$G^1 = -2\pi y = -2\pi \frac{\pm \alpha}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}} \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

Da die Formeln zur Berechnung von $\Theta_1(u)$ und $\Theta_2(u)$ nicht ganz einfach sind, so sollen diese Grössen zur Kontrolle auf den beiden verschiedenen Wegen bestimmt werden. Es sollen $\Theta_1(u)$ und $\Theta_2(u)$ zunächst mit Hülfe der Determinanten $\vartheta_3\vartheta_1' - \vartheta_1\vartheta_3'$ und $\vartheta_3\vartheta_2' - \vartheta_2\vartheta_3'$ ausgerechnet werden. Dazu müssen die Ableitungen von ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gebildet werden.

$$\pm \frac{d\vartheta_1}{du} = \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u} + \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u \frac{\sigma_1^2 u \sigma_3 u}{\sigma_2^2 u \sigma_2 u}$$

$$+ \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} u \frac{\sigma u}{\sigma_2 u} \cdot -(e_1 - e_2) \frac{\sigma u \sigma_3 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u}$$

$$- \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \cdot -(e_3 - e_2) \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u}$$

$$+ \frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} \cdot 3 \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} \cdot -(e_3 - e_2) \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u}$$

$$- \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma_1^2 u \sigma_3 u \sigma_2' u}{\sigma_2^2 u \sigma_2 u \sigma_2 u} - \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \cdot -(e_1 - e_2) \frac{\sigma^2 u \sigma_3 u \sigma_2' u}{\sigma_2^2 u \sigma_2 u \sigma_2 u}$$

$$- \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u} \left\{ -(e_2 - e_1) \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - e_1 \right\}$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} u \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3\lambda^2(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6} u \frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$+ \frac{4\alpha^3\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6} \frac{\sigma u \sigma_1 u \sigma_3^2 u}{\sigma_2 u \sigma_2 u \sigma_2^2 u} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma_3 u \sigma_2' u}{\sigma_2 u \sigma_2 u}$$

$$+ \frac{\alpha^3\lambda^2}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} \frac{\sigma_3^3 u \sigma_2' u}{\sigma_2^3 u \sigma_2 u},$$

$$\pm \frac{d\vartheta_2}{du} = \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma_1^2 u \sigma_3 u}{\sigma_2^2 u \sigma_2 u} + \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \cdot -(e_1 - e_2) \frac{\sigma^2 u \sigma_3 u}{\sigma_2^2 u \sigma_2 u}$$

$$= \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{2\alpha^3\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u},$$

$$\pm\frac{d\vartheta_3}{du} = \frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma u\sigma_1 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u} + \frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u\frac{\sigma_1^2 u\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u\sigma_2 u}$$

$$+\frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\cdot-(e_1-e_2)u\frac{\sigma^2 u\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\cdot-(e_1-e_2)\frac{\sigma u\sigma_1 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\cdot 3\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\cdot-(e_3-e_2)\frac{\sigma u\sigma_1 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u} - \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_1^2 u\sigma_3 u\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

$$-\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\cdot-(e_1-e_2)\frac{\sigma^2 u\sigma_3 u\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

$$-\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\sigma_1 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u}\left\{-(e_2-e_1)\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - e_1\right\}$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}u\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$+\frac{4\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\frac{\sigma u\sigma_1 u\sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u\sigma_2^2 u} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u\sigma_2' u}{\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^3 u\sigma_2' u}{\sigma_2^3 u\sigma_2 u}.$$

Es ist nun, wenn man von der additiven Konstanten, die in den späteren Formeln doch wegfällt, absieht,

$$\Theta_1(u) = F_1\left(\vartheta_3\frac{d\vartheta_1}{du} - \vartheta_1\frac{d\vartheta_3}{du}\right).$$

Man hat also die Determinante $\vartheta_3\frac{d\vartheta_1}{du} - \vartheta_1\frac{d\vartheta_3}{du}$ zu bilden. Die Elemente der Determinante sind, wenn man das doppelte Vorzeichen, welches sich weghebt, gleich fortlässt,

1) $$\frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u\frac{\sigma u\sigma_1 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u} - \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\sigma_1 u\sigma_2' u}{\sigma_2 u\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

2) $$\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}u\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$+\frac{4\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\frac{\sigma u\sigma_1 u\sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\sigma_2 u\sigma_2^2 u} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3 u\sigma_2'}{\sigma_2 u\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^3 u\sigma_2' u}{\sigma_2^3 u\sigma_2 u}$$

$$3)\quad \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$4)\quad \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}-\frac{\alpha^3\lambda^2(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,u\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$+\frac{4\alpha^3\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^2 u}-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3\lambda^2}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^3 u\,\sigma_2 u}.$$

Multipliciert man die Elemente der zweiten Zeile mit $-\frac{2-\alpha\lambda}{\lambda^2}$ und addiert dann zu den Elementen der ersten Zeile, so werden letztere

$$1)\quad -\frac{8\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}+\frac{2\alpha}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$2)\quad =\frac{4\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{4\alpha^3}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,u\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}.$$

Multipliciert man jetzt die Elemente der ersten Zeile mit

$$\frac{\lambda^2(2-\alpha\lambda)}{12(1-\alpha\lambda)}-\frac{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4(1-\alpha\lambda)}\,\frac{1}{u}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

und addiert zu den Elementen der zweiten Zeile, so werden letztere

$$3)\quad -\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$-\frac{\alpha}{2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{1}{u}\,\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$4)\quad \frac{4\alpha^3\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^2 u}.$$

Wenn man jetzt die Elemente der ersten Kolonne mit u multipliciert und die der ersten Zeile durch u dividiert und ebenso die Elemente der zweiten Kolonne durch $\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$ dividiert und die der ersten Zeile mit derselben Grösse multipliciert, so werden die Elemente der Determinante

$$1)\quad \frac{\alpha}{2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,u-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}+\frac{2\alpha}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$2) \quad -\frac{4\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{4\alpha^3}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$3) \quad -\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$-\frac{\alpha}{2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$4) \quad \frac{4\alpha^3\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}.$$

Werden die Elemente der zweiten Kolonne mit

$$-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,u\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}+\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{12\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,u\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

multipliciert und dann zu den Elementen der ersten Kolonne addiert, so werden letztere

$$1) \quad \frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{6\alpha\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,u-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{6\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+\frac{2\alpha}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$3) \quad -\frac{\alpha}{2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Es ist daher die Determinante

$$\vartheta_2\frac{d\vartheta_1}{du}-\vartheta_1\frac{d\vartheta_2}{du}=\frac{2\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$-\frac{2\alpha^4(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^8}\,u\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}+\frac{8\alpha^4}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^8}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^3 u}$$

$$-\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}+\frac{2\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^4 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^4 u\,\sigma_2 u}.$$

Durch Multiplication mit

$$F_1 = 2\pi\,\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}{8\alpha^2}\,\frac{\sigma_2^2 u}{\sigma_3^2 u}$$

erhält man

$$\Theta_1(u) = 2\pi\left\{\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\right.$$

$$-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}+\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$\left.-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}\right\}.$$

Ebenso bestimmt sich $\Theta_2(u)$. Es ist die Determinante

$$\vartheta_3 \frac{d\vartheta_2}{du} - \vartheta_2 \frac{d\vartheta_3}{du}$$

zu berechnen. Die Elemente der Determinante sind

$$1)\quad \frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\, u \,\frac{\sigma u\, \sigma_1 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u} - \frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u} - \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u}$$

$$2)\quad \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\, u\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{\alpha^3(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\, u\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$
$$+\frac{4\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2^2 u} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2^3 u\, \sigma_2 u}$$

$$3)\quad \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\, \sigma_1 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u}$$

$$4)\quad \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{2\alpha^3\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

Multipliciert man die Elemente der zweiten Zeile mit

$$-\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{6\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\, u + \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

und addiert dann zu den Elementen der ersten Zeile, so werden letztere

$$1)\quad -\frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} + \frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}$$

$$2)\quad \frac{4\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3^2 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2^2 u}.$$

Dividiert man die Elemente der zweiten Zeile durch $\frac{\sigma u\, \sigma_1 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u}$ und multipliciert mit derselben Grösse die Elemente der zweiten Kolonne, so wird dadurch

$$2)\quad -\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{4(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} + \frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)^2}{2(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}$$
$$-\frac{\alpha^5\lambda^2(2-\alpha\lambda)}{4(1-\alpha\lambda)\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^6 u}{\sigma_2^6 u}$$

3) $\dfrac{4a\sqrt{1-a\lambda}}{(1+\sqrt{1-a\lambda})^2}$.

Wenn man nun die Elemente der ersten Kolonne mit

$$-\frac{2-\alpha\lambda}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}+\frac{\alpha^2\lambda^2}{2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

multipliciert und zu den Elementen der zweiten Kolonne addiert, so werden letztere

2) $\dfrac{\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\dfrac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}$

4) 0.

Man hat dann

$$\vartheta_3\frac{d\vartheta_2}{du}-\vartheta_2\frac{d\vartheta_3}{du}=-\frac{4\alpha^4}{(1+\sqrt{1+\alpha\lambda})^7}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}$$

$$\Theta_2(u)=-2\pi\frac{\alpha^2}{2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}.$$

Die Grössen $\Theta_1(u)$ und $\Theta_2(u)$ können nun auch durch Integration berechnet werden.

$$\begin{aligned}\Theta_1(u)&=\int G^1\vartheta_1(u)\,du\\&=-2\pi\int\Bigg\{\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\\&\quad-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}+\frac{\alpha^4\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}\\&\quad-\frac{2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\Bigg\}\,du.\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{d}{du}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}=\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}&=\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda)^2}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\,\frac{d}{du}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\\&=\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{d}{du}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\int u\frac{d}{du}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\,du=u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\int\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\,du.$$

Um dies letzte Integral zu bestimmen, benutzt man die Formel

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} = \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2}\frac{d}{du}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \frac{2(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}$$

$$\int\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}du = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \frac{2(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}u.$$

Wird dies eingesetzt, so erhält man

$$\int u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}du = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\sqrt{1-\alpha\lambda}}u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}{8\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$
$$- \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{12\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}u.$$

Zur Bestimmung von $\int\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}du$ dient die Gleichung

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u} = \frac{\sigma_1^2 u\,\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2^2 u} - \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma^2 u\,\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2^2 u}$$
$$+ \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma^2 u\,\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2^2 u}$$
$$= -\frac{3\alpha^2\lambda^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u} + \frac{2-\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}},$$

aus der man erhält

$$\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u} = -\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}\frac{d}{du}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$
$$+ \frac{4(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{3\alpha^2\lambda^2}$$

$$\int\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}du = -\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$
$$+ \frac{4(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}\int\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}du - \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{3\alpha^2\lambda^2}u$$
$$= -\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u} + \frac{4(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}{3\alpha^4\lambda^4}\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$
$$+ \frac{(32-32\alpha\lambda+5\alpha^2\lambda^2)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{9\alpha^4\lambda^4}u.$$

Schliesslich ist noch zu berechnen

$$\int \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u}\, du = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\sqrt{1-\alpha\lambda}} \int \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} \frac{d}{du} \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\, du.$$

Es ist

$$\int \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} \frac{d}{du} \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\, du = \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \int \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} \frac{d}{du} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\, du \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} \frac{d}{du} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\, du = \frac{\alpha^2 \lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4} \int \frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}\, du - \frac{2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \int \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\, du$$

$$= -\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u} + \frac{2(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{3\alpha^2\lambda^2} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+ \frac{16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{9\alpha^2\lambda^2} u,$$

und daher

$$\int \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u}\, du = \frac{1}{6} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u} + \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{8\sqrt{1-\alpha\lambda}} \frac{\sigma_3^2 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\, \sigma_2 u}$$

$$- \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{12\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} - \frac{(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{72\alpha^2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}} u.$$

Setzt man alle diese Werte in das Integral für $\Theta_1(u)$ ein, so wird

$$\Theta_1(u) = -2\pi \Big\{ \frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} u \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} - \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$- \frac{(2-\alpha\lambda)^2}{18\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u - \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} - \frac{(2-\alpha\lambda)^2}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u$$

$$- \frac{2\alpha^2}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u} + \frac{2(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+ \frac{32 - 32\alpha\lambda + 5\alpha^2\lambda^2}{18\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u - \frac{\alpha^2}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u}$$

$$- \frac{\alpha^2}{4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} \frac{\sigma_3^2 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\, \sigma_2 u} + \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{6\lambda^2(1-\alpha\lambda)} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+ \frac{16 - 16\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{36\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u \Big\}.$$

$$\Theta_1(u) = 2\pi \Big\{ \frac{-8 + 8\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u - \frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} u \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma_2 u\, \sigma_2 u} - \frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} \frac{\sigma_3^2 u\, \sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\, \sigma_2 u} \Big\}.$$

Das ist derselbe Wert, welcher früher erhalten ist.

Sehr leicht berechnet sich

$$\begin{aligned}\Theta_2(u) = \int G^1\vartheta_2(u)du &= -2\pi\int\frac{4\alpha^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\,du\\ &= -2\pi\frac{\alpha^2}{2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u},\end{aligned}$$

was ebenfalls mit der früheren Berechnung übereinstimmt.

Mit Hülfe der bei der Bestimmung von $\Theta_1(u)$ gebrauchten Formeln findet man auch

$$\begin{aligned}\Theta_3(u) &= \int G^1\vartheta_3(u)\,du\\
&= -2\pi\int\Big\{\frac{2\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\\
&\quad-\frac{\alpha^4}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}+\frac{\alpha^4(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma_3^4 u}{\sigma_2^4 u}\\
&\quad-\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\Big\}\,du\\
&= -2\pi\Big\{\frac{\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12\lambda^4(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\\
&\quad-\frac{(2-\alpha\lambda)(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{18\lambda^4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u-\frac{\alpha^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\\
&\quad-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u-\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\\
&\quad+\frac{2(2-\alpha\lambda)^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda^4(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}+\frac{(2-\alpha\lambda)(32-32\alpha\lambda+5\alpha^2\lambda^2)}{18\lambda^4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\\
&\quad-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}\\
&\quad+\frac{(2-\alpha\lambda)^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{6\lambda^4(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}+\frac{(2-\alpha\lambda)(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{36\lambda^4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u\Big\}\\
&= 2\pi\Big\{-\frac{(2-\alpha\lambda)(32-32\alpha\lambda-\alpha^2\lambda^2)}{12\lambda^4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u-\frac{\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,u\,\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}\\
&\quad+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^4(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}\\
&\quad+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}\Big\}.\end{aligned}$$

Jetzt sind alle Elemente der Determinante dritter Ordnung $\Theta(u, u_0)$ berechnet. Dieselben sind in der ersten Zeile

$$1)\ \pm\left\{\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u_0\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0}-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right\}$$

$$2)\ \pm\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}$$

$$3)\ \pm\left\{\frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u_0\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}-\frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0}-\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right\},$$

in der zweiten Zeile

$$4)\ \pm\left\{\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\right\}$$

$$5)\ \pm\frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$6)\ \pm\left\{\frac{2\alpha(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha^3}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\right\}$$

und in der dritten Zeile

$$7)\ 2\pi\left\{\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}(u-u_0)-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\left(u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-u_0\frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0}\right)\right.$$
$$+\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\left(\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right)$$
$$-\frac{(2-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}\right)$$
$$\left.+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\left(\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma_3^2 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right)\right\}$$

$$8)\ -2\pi\frac{\alpha^2}{2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\left(\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0}\right)$$

$$9)\ 2\pi\left\{-\frac{(2-\alpha\lambda)(32-32\alpha\lambda-\alpha^2\lambda^2)}{12\lambda^4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}(u-u_0)\right.$$
$$-\frac{\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{12\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\left(u\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-u_0\frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0}\right)$$

$$+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\left(\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right)$$

$$-\frac{(16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{4\lambda^4(1-\alpha\lambda)}\left(\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}\right)$$

$$+\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\left(\frac{\sigma_3^2 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2^2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma_3^2 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right)\Bigg\}.$$

Von Wichtigkeit sind auch noch die Grössen $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, da auch der Fall eintreten kann, dass dieselben gleichzeitig 0 werden. Diese Grössen sind

$$f_1(u) = \vartheta_2(u_0)\,\vartheta_3(u)-\vartheta_3(u_0)\,\vartheta_2(u)$$

$$=\frac{8\alpha^2(-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)}{3\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\,[u-u_0]$$

$$-\frac{2\alpha^4}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\left[\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0}\right]$$

$$+\frac{2\alpha^4(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\left[\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3^3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2^3 u}-\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^3 u_0}\right]$$

$$-\frac{8\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\left[\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}\right]$$

$$f_2(u) = \vartheta_3(u_0)\,\vartheta_1(u)-\vartheta_1(u_0)\,\vartheta_3(u)$$

$$=\frac{8\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\left[u_0\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u}-u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0}\right]$$

$$-\frac{4\alpha^4}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^8}\left[u_0\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3^3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2^3 u}-u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^3 u_0}\right]$$

$$+\frac{16\alpha^2}{\lambda^2(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\left[u_0\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}-u\,\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}\right]$$

$$+\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3 u\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0}\left[\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}-\frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0}\right]$$

$$-\frac{4\alpha^2}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\left[\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0}-\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_2' u_0\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u}\right]$$

$$f_3(u) = \vartheta_1(u_0)\,\vartheta_2(u)-\vartheta_2(u_0)\,\vartheta_1(u)$$

$$=-\frac{8\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\,[u-u_0]$$

$$+\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\left[\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u}-\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0}\right]$$

$$-\frac{2\alpha^4\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\left[\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3^3 u}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2^3 u}-\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2^3 u_0}\right]$$

$$+\frac{8\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\left[\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}-\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}\right].$$

Den einfachsten Fall erhält man, wenn man u_0 gleich 0 annimmt, das heisst, wenn man bei einem Punkte beginnt, wo y ein Minimum ist. Dann ist, da $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ für $u = 0$ den Wert 1 hat,

$$f_3(u) = -\frac{4\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Für $u = 0$ ist $f_3(u) = 0$. $\Theta(u, 0)$ wird für $u = 0$ von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein, wie man leicht daraus sieht, dass die erste Ableitung von $\Theta(u, u_0)$ für $u = u_0$ gleich 0 wird. Diese erste Ableitung ist

$$\frac{d\Theta(u,u_0)}{du} = \begin{vmatrix} \vartheta_1(u_0) & \vartheta_2(u_0) & \vartheta_3(u_0) \\ \vartheta_1'(u) & \vartheta_2'(u) & \vartheta_3'(u) \\ \Theta_1(u)-\Theta_1(u_0) & \Theta_2(u)-\Theta_2(u_0) & \Theta_3(u)-\Theta_3(u_0) \end{vmatrix}$$

Die Elemente der letzten Zeile werden für $u = u_0$ einzeln gleich 0. Der Quotient $\frac{\Theta(u,0)}{f_3(u)}$ ist daher für $u = 0$ auch gleich 0. Da nun

$$\frac{d}{du}\,\frac{\Theta(u,u_0)}{f_3(u)} = F_1(u)\left(\frac{H}{f_3(u)}\right)^2$$

ist, und für den Fall des Minimums, der hier vorliegt, $F_1(u)$ stets positiv ist, so muss $\frac{\Theta(u,0)}{f_3(u)}$, wenn u von 0 ab wächst, auch zunehmen, so lange $f_3(u)$ nicht 0 wird. Da $\Theta(u, u_0)$ niemals unendlich gross wird, so wird der Quotient erst unendlich gross werden können, wenn $f_3(u)$ gleich 0 wird. $f_3(u)$ wird zum ersten Male gleich 0 für $u = \omega$, weil dann $\sigma_1 u$ gleich 0 wird. Es fragt sich, ob gleichzeitig auch $f_1(u)$ und $f_2(u)$ für $u = \omega$ gleich 0 werden. Es ist

$$f_1(u) = \frac{4\alpha^4}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$f_2(u) = \frac{4\alpha^2(2-\alpha\lambda-6\sqrt{2-\alpha\lambda})}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,u\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$
$$+\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{4\alpha^2}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Für $u = \omega$ wird auch $f_1(u)$ gleich 0. Es muss noch $f_2(u)$ berechnet werden. Um dies zu bestimmen, muss man $\frac{\sigma_3\omega}{\sigma_2\omega}$ kennen. Nach einer früheren Formel ist

$$\frac{\sigma_3^2\omega}{\sigma_2^2\omega} = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}{\alpha^2\lambda^2}$$

$$\frac{\sigma_3\omega}{\sigma_2\omega} = \frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\pm\alpha\lambda}.$$

Da $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ stets positiv ist für reelle Werte von u, so muss das positive Zeichen genommen werden, wenn $\alpha\lambda$ positiv ist, das negative, falls diese Grösse negativ ist. Es wird für $u = \omega$

$$\begin{aligned} f_2(u) &= \pm\left\{-\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\right. \\ &\qquad \left.+\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}{\alpha^3\lambda^3}\right\} \\ &= \pm\frac{4\alpha}{\lambda^3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}. \end{aligned}$$

$f_2(u)$ ist daher stets von 0 verschieden mit Ausnahme des schon früher ausgeschlossenen Falles $\alpha = 0$. Dieser Fall liefert die Kugel, und für diese ist in der schon erwähnten Abhandlung des Herrn H. A. Schwarz allgemein bewiesen, dass ihre Oberfläche ein Minimum bei gegebenem Volumen ist. Da $f_2(u)$ also nicht gleich 0 ist, so ist auch $\Theta(\omega, 0)$ nicht gleich 0, und $\frac{\Theta(u,0)}{f_3(u)}$ wächst ins Unendliche, während $f_3(u)$ sich der 0 nähert. Da $f_3'(u)$ nicht gleichzeitig mit $f_3(u)$ gleich 0 wird, so wechselt $f_3(u)$, wenn u durch ω geht, sein Zeichen, und der Quotient $\frac{\Theta(u,0)}{f_3(u)}$ geht dabei von $+\infty$ zu $-\infty$ über. Wenn u jetzt weiter wächst, so muss der Quotient wieder zunehmen. Es fragt sich, welchen Wert der Quotient hat, wenn $f_3(u)$ zum zweiten Male 0 wird. Dies tritt ein für $u = 2\omega$, denn hierfür wird σu gleich 0. $f_1(u)$ wird ebenfalls gleich 0. Es wird ferner

$$f_2(u) = -\frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6} + \frac{\alpha^4}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6} = 0.$$

Es wird daher $\Theta(u, 0)$ jedenfalls für $u = 2\omega$ gleich 0. Es muss nun untersucht werden, ob der Ausdruck schon vorher einmal 0 wird. Um dies entscheiden zu können, muss man $\frac{\Theta(2\omega,0)}{f_3(2\omega)}$ bilden. Wenn diese Grösse negativ ist, so kann $\Theta(u, 0)$ für einen Wert $u < 2\omega$ nicht 0 werden, weil der Quotient $\frac{\Theta(u,0)}{f_3(u)}$, während u von ω bis 2ω wächst, stetig zunimmt von $-\infty$ bis zu einer negativen Grösse

sodass also die 0 dabei nicht überschritten wird. Ist $\frac{\Theta(2\omega, 0)}{f_3(2\omega)}$ jedoch positiv, so muss man schliessen, dass $\Theta(u, 0)$ zwischen $u = \omega$ und $u = 2\omega$ einmal, aber auch nur einmal, gleich 0 geworden ist. Andererseits folgt, dass, wenn der Quotient nicht gleich 0 ist, $\Theta(u, 0)$ für $u = 2\omega$ von derselben Ordnung unendlich klein wird, wie $f_3(u)$, also von der ersten Ordnung. Es wechselt also die Determinante beim Durchgange durch den konjugierten Punkt ihr Zeichen, was erforderlich ist, wenn man beweisen will, dass man nicht über den konjugierten Punkt hinausgehen darf, falls man noch ein Minimum behalten will.

Um den Quotienten $\frac{\Theta(2\omega, 0)}{f_3(2\omega)}$ zu berechnen, bestimmt man

$$\frac{f_1(u)}{f_3(u)} = -\frac{\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$\frac{f_2(u)}{f_3(u)} = \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} \frac{1-\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}}{\frac{\sigma u \, \sigma_1 u}{\sigma_2 u \, \sigma_2 u}}$$

$$+ \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u.$$

Es ist

$$1-\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = \frac{\sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u} = -\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2} \frac{\sigma^2 u}{\sigma_2^2 u},$$

also

$$\frac{f_2(u)}{f_3(u)} = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3} \frac{\sigma_3 u \, \sigma u}{\sigma_2 u \, \sigma_1 u} + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$- \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} u.$$

Für $u = 2\omega$ wird daher

$$\frac{f_1(2\omega)}{f_3(2\omega)} = -\frac{\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}$$

$$\frac{f_2(2\omega)}{f_3(2\omega)} = \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}} 2\eta - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})} 2\omega.$$

Es ist nun

$$\frac{\Theta(2\omega, 0)}{f_3(2\omega)} = \frac{f_1(2\omega)}{f_3(2\omega)} [\Theta_1(2\omega) - \Theta_1(0)]$$

$$+ \frac{f_2(2\omega)}{f_3(2\omega)} [\Theta_2(2\omega) - \Theta_2(0)] + \Theta_3(2\omega) - \Theta_3(0)$$

Daher ist noch zu berechnen

$$\Theta_1(2\omega) - \Theta_1(0) = 2\pi\left\{\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\omega - \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,2\eta\right\}$$

$$\Theta_2(2\omega) - \Theta_2(0) = 0$$

$$\Theta_3(2\omega) - \Theta_3(0) = 2\pi\left\{\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2-24\sqrt{1-\alpha\lambda}+12\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\omega\right.$$
$$\left.+\frac{-8+7\alpha\lambda-8\sqrt{1-\alpha\lambda}+\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,2\eta\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Werte findet man

$$\frac{\Theta(2\omega,0)}{f_3(2\omega)} = 2\pi\left\{-\frac{\alpha^2(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{6\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,2\omega + \frac{\alpha^2}{2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\eta\right.$$
$$+\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2-24\sqrt{1-\alpha\lambda}+12\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\omega$$
$$\left.+\frac{-8+7\alpha\lambda-8\sqrt{1-\alpha\lambda}+\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,2\eta\right\}$$
$$= 2\pi\left\{-\frac{2(2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda^4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,2\omega - \frac{4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{\lambda^4}\,2\eta\right\}$$
$$= -2\pi\,\frac{4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{\lambda^4}\,(2\eta - e_3\omega).$$

Wenn sich nun beweisen lässt, dass $2\eta - e_3\omega$ stets positiv ist, so ist damit gezeigt, dass der Quotient $\frac{\Theta(2\omega,0)}{f_3(2\omega)}$ negativ ist, das heisst, dass $\Theta(u,0)$ für $u = 2\omega$ zum ersten Male 0 wird. e_1, e_2, e_3 nehmen alle möglichen Werte, bei denen $e_1 - e_3 = 1$ und $e_1+e_2+e_3 = 0$ ist, an, wenn $\alpha\lambda$ alle Werte von 0 bis 1 annimmt. Es sind die Differentiale

$$de_1 = \frac{2\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,d\alpha\lambda$$

$$de_2 = -\frac{4\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,d\alpha\lambda$$

$$de_3 = \frac{2\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,d\alpha\lambda$$

Die äussersten Werte, welche e_1 annehmen kann, sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Diese Werte werden angenommen für $\alpha\lambda = 0$ beziehungsweise $\alpha\lambda = 1$. Da der Differentialquotient von e_1 nach $\alpha\lambda$ für alle Werte von $\alpha\lambda$ zwischen 0 und 1 positiv ist, so nimmt e_1 fortwährend zu von $\frac{1}{3}$ bis

$\frac{2}{3}$, nimmt also alle möglichen Werte an. Wenn e_1 bestimmt ist, so sind vermöge der Relationen

$$e_1 - e_3 = 1$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

auch e_2 und e_3 bestimmt, sodass auch diese alle möglichen Werte annehmen müssen. Die Grössen ω und η nehmen dann auch alle möglichen Werte an, also auch der Ausdruck $2\eta - e_3\omega$. Um das Zeichen des letzteren zu ermitteln, sucht man seine Ableitung nach $\alpha\lambda$ auf. Es müssen dazu die Grössen $d\omega$ und $d\eta$ bestimmt werden. Diese sind in der Abhandlung des Herrn Weierstrass „Zur Theorie der elliptischen Functionen" ausgedrückt durch die schon berechneten Grössen d_1 und d_2. Wenn man die Werte dafür einsetzt, so erhält man

$$d\omega = \left\{ -\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta + \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\omega \right\} d\alpha\lambda$$

$$d\eta = \left\{ \frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta \right\} d\alpha\lambda$$

Es wird dann

$$\frac{\partial(2\eta - e_3\omega)}{\partial\alpha\lambda} = \frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{18\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega - \frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta$$
$$- \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta + \frac{-32+32\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega$$
$$- \frac{2\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega$$
$$= \frac{\alpha\lambda(2-\alpha\lambda \quad 6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{12(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega - \frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\eta$$
$$= -\frac{\alpha\lambda}{4(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}(\eta + e_2\omega).$$

Es kommt also auf das Zeichen von $\eta + e_2\omega$ an. Für $\alpha\lambda = 1$ ist

$$e_1 = \tfrac{2}{3}, \quad e_2 = e_3 = -\tfrac{1}{3}$$
$$k = 0, \quad K = \omega = \frac{\pi}{2}, \quad E = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \frac{\pi}{6}, \quad \text{also}$$
$$\eta + e_2\omega = 0.$$

Um das Zeichen von $\eta + e_2\omega$ für die Werte von $\alpha\lambda$ zwischen 0 und 1 zu bestimmen, berechnet man noch die Ableitung dieser Grösse nach $\alpha\lambda$.

$$\frac{\partial(\eta+e_2\omega)}{\partial\alpha\lambda}=\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta$$

$$+\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda)}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta-\frac{(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega-\frac{4\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega$$

$$=-\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega.$$

Wenn $\alpha\lambda$ von 0 bis 1 zunimmt, so ist der Differentialquotient von $\eta+e_2\omega$ stets negativ, das heisst, $\eta+e_2\omega$ nimmt beständig ab. Da nun $\eta+e_2\omega$ für $\alpha\lambda=1$ den Wert 0 hat, so muss es in dem ganzen Intervalle von $\alpha\lambda=0$ bis $\alpha\lambda=1$ einen positiven Wert haben. Daraus folgt, dass der Differentialquotient von $2\eta-e_3\omega$ in diesem Intervalle negativ ist, das heisst, $2\eta-e_3\omega$ nimmt ab. Für $\alpha\lambda=1$ findet man

$$2\eta-e_3\omega=\frac{\pi}{2}.$$

Es muss daher $2\eta-e_3\omega$ für alle Werte von $\alpha\lambda$ von 0 bis 1 positiv sein. Damit ist bewiesen, dass, wenn $u_0=0$ ist, das heisst, wenn der Anfangspunkt der Kurve bei einem Minimum von y genommen wird, der konjugierte Punkt zu diesem der nächste Punkt ist, in welchem y wieder ein Minimum wird. Dieser specielle Fall liefert also Rotationsflächen, welche auch eine zur Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene haben. Wenn umgekehrt die Fläche eine zur Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene haben soll, so werden, falls die Mitte der Fläche durch eine Ausbauchung und nicht durch eine Einschnürung gebildet wird, die konjugierten Punkte diejenigen sein, in welchen y zwei aufeinander folgende Male eine Minimum wird.

Ein zweiter einfacher Fall ist der, wo $u_0=\omega$ ist, wo also der Anfangspunkt dem Maximalwerte von y entspricht. Es wird

$$f_1(u)=\mp\frac{4\alpha}{\lambda^3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}$$

$$f_2(u)=\pm\Big[\frac{4\alpha(2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda^3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}u\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}-\frac{\alpha}{\lambda^3(1-\alpha\lambda)}\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$+\frac{\alpha^3}{\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\frac{\sigma_3^3 u}{\sigma_2^3 u}-\frac{4\alpha}{\lambda^3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2' u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u\,\sigma_2 u}\Big]$$

$$f_3(u)=\pm\frac{4\alpha}{\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u}.$$

Das obere Zeichen gilt in diesen Ausdrücken, wenn $\alpha\lambda$ positiv ist, das untere, falls es negativ ist. $f_3(u)$ wird, wenn man u von

ω ab wachsen lässt, für 2ω zuerst wieder gleich 0. Gleichzeitig wird dann auch $f_1(u)$ gleich 0. Es fragt sich, welchen Wert nimmt $f_2(u)$ an. Es wird

$$f_2(2\omega) = \mp \frac{4\alpha}{\lambda^3 \sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}.$$

Dies wird mit Ausnahme des früher schon erwähnten Falles $\alpha = 0$ nicht 0. Es wird daher auch $\Theta(2\omega, \omega)$ nicht 0, und der Quotient $\frac{\Theta(u, \omega)}{f_3(u)}$ geht bei $u = 2\omega$ von $+\infty$ zu $-\infty$ über. Der nächste Wert, für den $f_3(u)$ gleich 0 wird, ist dann $u = 3\omega$. Hierfür werden auch $f_1(u)$ und $f_2(u)$ gleich 0, sodass $\Theta(3\omega, \omega)$ gleich 0 ist. Wenn nun $\Theta(u, \omega)$ nicht vor $u = 3\omega$ gleich 0 werden soll, so muss der Quotient $\frac{\Theta(3\omega, \omega)}{f_3(3\omega)}$ negativ sein. Zur Berechnung dieses Quotienten muss man wieder die Grössen $\frac{f_1(u)}{f_3(u)}$ und $\frac{f_2(u)}{f_3(u)}$ bestimmen.

$$\frac{f_1(u)}{f_3(u)} = -\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\lambda^2}$$

$$\frac{f_2(u)}{f_3(u)} = \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u - \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$
$$-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}{4\lambda^2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} - \frac{1-\dfrac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\dfrac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}}{\dfrac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u}}.$$

Oder da

$$\sigma_2^2 u - \frac{\alpha^2\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\sigma_3^2 u = \frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\sigma_1^2 u$$

ist,

$$\frac{f_2(u)}{f_3(u)} = \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u - \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$
$$-\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma u\,\sigma_2 u}.$$

Es wird dann

$$\frac{f_1(3\omega)}{f_3(3\omega)} = -\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\lambda^2}$$

$$\frac{f_2(3\omega)}{f_3(3\omega)} = \frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,3\omega - \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}\,3\eta.$$

Nimmt man hinzu

$$\Theta_1(3\omega)-\Theta_1(\omega)=2\pi\left\{-\frac{2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}2\omega+\frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2\lambda^2\sqrt{1-\alpha\lambda}}2\eta\right\}$$

$$\Theta_2(3\omega)-\Theta_2(\omega)=0$$

$$\Theta_3(3\omega)-\Theta_3(\omega)=2\pi\left\{-\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2+24\sqrt{1-\alpha\lambda}-12\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}2\omega\right.$$
$$\left.+\frac{(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}2\eta\right\},$$

so erhält man

$$\frac{\Theta(3\omega,\omega)}{f_3(3\omega)}=2\pi\left\{\frac{(2-\alpha\lambda+6\sqrt{1-\alpha\lambda})(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{6\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}2\omega\right.$$
$$-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}{2\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}2\eta-\frac{-8+8\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2+24\sqrt{1-\alpha\lambda}-12\alpha\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}2\omega$$
$$\left.+\frac{(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{2\lambda^4\sqrt{1-\alpha\lambda}}2\eta\right\}$$
$$=2\pi\left\{-\frac{2(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})}{3\lambda^4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}2\omega-\frac{4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{\lambda^4}2\eta\right\}$$
$$=-2\pi\frac{4(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}{\lambda^4}\left\{2\eta-e_2\omega\right\}.$$

Es muss der Ausdruck $2\eta-e_2\omega$ näher untersucht werden. Es ist

$$\frac{\partial(2\eta-e_2\omega)}{\partial\alpha\lambda}=\frac{16-16\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2}{18\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{6\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta$$
$$-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta+\frac{(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{36\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega$$
$$+\frac{4\alpha\lambda}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega$$
$$=-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\eta+\frac{-2(2-\alpha\lambda)(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})+3\alpha^2\lambda^2}{12\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\omega$$
$$=\frac{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\left\{-\frac{2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda}}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\eta\right.$$
$$\left.+\frac{-2(2-\alpha\lambda)(2-\alpha\lambda-6\sqrt{1-\alpha\lambda})+3\alpha^2\lambda^2}{9(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\omega\right\}$$
$$=\frac{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{4\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)}\left\{e_2\eta+[e_1e_2+\tfrac{1}{3}(e_1-e_2)]\,\omega\right\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass der Ausdruck in der Klammer stets positiv ist. Wenn man demselben die Gestalt giebt

$$e_2(\eta+e_1\omega)+\tfrac{1}{3}(e_1-e_2)\omega,$$

so sieht man, dass er positiv ist, wenn e_2 positiv ist, denn es ist

$$\eta+e_1\omega = E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

stets positiv, ebenso wie e_1-e_2 und ω. Man kann dem Ausdrucke auch eine andere Form geben, indem man in der ersten Klammer für e_1 den Wert $1+e_3$ und in der zweiten $-e_2-e_3$ einführt. Man erhält dann

$$e_2(\eta+e_3\omega)+\tfrac{1}{3}(e_2-e_3)\omega.$$

Es ist

$$\eta+e_3\omega = \eta+e_1\omega-(e_1-e_3)\omega = E-K.$$

Es ist E stets kleiner als K, wenn nicht $k = 0$ ist, für welchen Wert beide Grössen gleich sind. Wenn nun e_2 negativ ist, so ist $e_2(\eta+e_3\omega)$ positiv, und der ganze Ausdruck ebenfalls positiv, sodass gezeigt ist, dass der Ausdruck sowohl für positive als auch für negative Werte von e_2 positiv ist. Es ist also $\frac{\partial(2\eta-e_2\omega)}{\partial\alpha\lambda}$ in dem Intervalle von $\alpha\lambda$ zwischen 0 und 1 stets positiv, das heisst, $2\eta-e_2\omega$ nimmt beständig zu. Für $\alpha\lambda = 1$ ist

$$2\eta-e_2\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn sich jedoch $\alpha\lambda$ der 0 nähert, so wird η negativ unendlich gross, e_2 nähert sich dem Werte $+\frac{1}{3}$ und ω dem Werte $+\infty$, sodass der ganze Ausdruck negativ unendlich gross wird. Da der Ausdruck von dem positiven Werte $\frac{\pi}{2}$ für $\alpha\lambda = 1$ beständig abnimmt bis zu negativ unendlich grossen Werten, so muss er einmal, aber auch nur einmal, den Wert 0 annehmen. Für alle diejenigen Werte von $\alpha\lambda$, für welche $2\eta-e_2\omega$ positiv ist, ist der Quotient $\frac{\Theta(3\omega,\omega)}{f_3(3\omega)}$ negativ, woraus folgt, dass $\Theta(u,\omega)$ für $u = 3\omega$ zum ersten Male 0 wird. Ist dagegen $2\eta-e_2\omega$ gleich 0, so kann zwar $\Theta(u,\omega)$ auch nicht vor dem Werte $u = 3\omega$ gleich 0 werden, aber es wird hier von der zweiten, beziehungsweise einer höheren, aber jedenfalls einer geraden Ordnung unendlich klein, das heisst, man hat hier den Fall, für den allein noch nicht bewiesen ist, dass man nicht weiter als bis zum konjugierten Punkte gehen darf. Dabei ist hier allerdings kaum anzunehmen, dass für ein noch grösseres Stück der Kurve ein Minimum eintreten wird. Man erhält diesen Fall für

$$\alpha\lambda = 0{,}83072$$

oder

$$\alpha\lambda = -4{,}9073.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} e_1 &= 0{,}39130 \\ e_2 &= 0{,}21740 \\ e_3 &= -0{,}60870 \\ \omega &= 2{,}3210 \\ \omega' &= 1{,}6467\,i \\ \eta &= 0{,}25231 \\ \eta' &= -0{,}49776\,i \end{aligned}$$

Ist $2\eta - e_2\omega$ negativ, so ist der Quotient $\frac{\Theta(u, \omega)}{f_3(u)}$ für $u = 3\omega$ positiv. Da er aber von dem Werte $-\infty$ für $u = 2\omega$ stetig wächst, so muss er schon vor $u = 3\omega$ den Wert 0 angenommen haben, was, da $f_3(u)$ nicht unendlich werden kann, nur dadurch möglich ist, dass $\Theta(u, \omega)$ für den betreffenden Wert von u gleich 0 wird, das heisst der konjugierte Punkt liegt vor $u = 3\omega$.

Für den Fall des Nodoids hat man in der Kurve eine Schleife, welche bei der Rotation einen Körper beschreibt, der bei der Integration doppel gerechnet wird. Es hat daher das Minimum, auch wenn die Bedingung, dass $2\eta - e_2\omega$ positiv ist, erfüllt ist, keine reale Bedeutung. Man kann aber in diesem Falle schliessen, dass der von der Schleife allein beschriebene Körper so beschaffen ist, dass die Oberfläche ein Minimum bei gegebenem Volumen ist, denn sonst könnte durch eine Veränderung der Schleife allein, wobei der Doppelpunkt festgehalten wird, eine Verkleinerung der Oberfläche eintreten.

In den beiden bis jetzt betrachteten Fällen bekommt die Determinante $\Theta(u, u_0)$ und besonders $f_3(u)$ so einfache Gestalt, dass man wirklich die konjugierten Punkte bestimmen kann. Diese Grössen sind aber in dem allgemeinen Falle so kompliciert, dass man die genaue Lage des zu dem Punkte u_0 konjugierten Punktes allgemein nicht bestimmen kann. Man kann aber beweisen, dass für jeden Punkt der konjugierte Punkt nicht um eine volle Periode von dem Anfangspunkt entfernt sein kann.

Man kann beweisen, dass $f_3(u)$ zwischen $u = u_0$ und $u = u_0 + 2\omega$ mindestens zweimal 0 wird. Da im allgemeinen $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ nicht gleichzeitig 0 werden, so muss für die beiden 0-Werte von $f_3(u)$ der Quotient $\frac{\Theta(u, u_0)}{f_3(u)}$ unendlich gross werden. Der Quotient wird nun zunächst, wenn man von $u = u_0$ ausgeht, positiv. Wenn $f_3(u)$ zum ersten Male 0 wird, wird er $+\infty$, springt zu $-\infty$ über

und wächst fortwährend, bis er, wenn $f_3(u)$ wieder 0 wird, bei $+\infty$ wieder angekommen sein muss. Man sieht, dass der Quotient dabei einmal den Wert 0 annehmen muss, das heisst, dass $\Theta(u, u_0)$ einmal gleich 0 werden muss. Selbst wenn $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ gleichzeitig für denselben Wert von u gleich 0 werden sollten, wird der Schluss gelten, dass $\Theta(u, u_0)$ zwischen den Werten u_0 und $u_0 + 2\omega$ von u einmal 0 wird, weil dann für diesen Wert von u $\Theta(u, u_0)$ auch gleich 0 wird. Der specielle Fall, dass $\frac{\Theta(u, u_0)}{f_3(u)}$ dabei gleich 0 ist, welcher allein eine Ausnahme bildet, wird im allgemeinen hierbei nicht eintreten.

Es fragt sich nun, was für Werte nimmt $f_3(u)$ an, wenn u von u_0 ab wächst. Für $u = u_0$ ist $f_3(u)$ gleich 0. Es muss der Differentialquotient dieser Funktion für $u = u_0$ bestimmt werden. Es ist

$$\begin{aligned} f_3(u) &= \vartheta_1(u_0)\,\vartheta_2(u) - \vartheta_2(u_0)\,\vartheta_1(u) \\ f_3'(u) &= \vartheta_1(u_0)\,\vartheta_2'(u) - \vartheta_2(u_0)\,\vartheta_1'(u) \\ f_3'(u_0) &= \vartheta_1(u_0)\,\vartheta_2'(u_0) - \vartheta_2(u_0)\,\vartheta_1'(u_0) \end{aligned}$$

Es ist das eine Determinante zweiter Ordnung, gebildet aus den vier Elementen

$$1)\quad \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u_0\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0} + \frac{\alpha^3\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0} - \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}$$

$$2)\quad \frac{4\alpha\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}$$

$$3)\quad \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)^2}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,u_0\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0} - \frac{\alpha^3\lambda^2(2-\alpha\lambda)}{3(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,u_0\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0} + \frac{4\alpha^3\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}\,(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2^2 u_0} - \frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0} + \frac{\alpha^3\lambda^2}{(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u_0\,\sigma_2' u_0}{\sigma_2^3 u_0\,\sigma_2 u_0}$$

$$4)\quad \frac{2\alpha(2-\alpha\lambda)}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0} - \frac{2\alpha^3\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0}.$$

Die Elemente der zweiten Kolonne mit

$$-\frac{2-\alpha\lambda}{6(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})}\,u_0 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha\lambda}}{2(1-\alpha\lambda)}\,\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}$$

multipliciert, sollen zu den Elementen der ersten Kolonne addiert werden. Dann werden letztere

$$1)\quad -\frac{\alpha(2-\alpha\lambda)}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}+\frac{\alpha^2\lambda^2}{2(1-\alpha\lambda)(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^4}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0}$$

$$3)\quad \frac{4\alpha^2\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3^2 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2^2 u_0}.$$

Multipliciert man aus, so wird

$$f_3'(u_0)=-\frac{4\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\frac{\sigma_3^3 u_0}{\sigma_2^3 u_0}$$

$f_3(u)$ wird daher zunächst negativ. Es lässt sich zeigen, dass $f_3(u_0+\omega)$ stets positiv ist. Daraus folgt, dass $f_3(u)$ in dem Intervalle von u_0 bis $u_0+\omega$ mindestens einmal gleich 0 wird. Wenn man u_0 um ω vermehrt, so wird

$$\frac{\sigma(u_0+\omega)}{\sigma_2(u_0+\omega)}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\,\frac{\sigma_1 u_0}{\sigma_3 u_0}=\pm\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma_1 u_0}{\sigma_3 u_0}$$

$$\frac{\sigma_1(u_0+\omega)}{\sigma_2(u_0+\omega)}=-\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u_0}{\sigma_3 u_0}=-\frac{\sigma u_0}{\sigma_3 u_0}$$

$$\frac{\sigma_3(u_0+\omega)}{\sigma_2(u_0+\omega)}=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_1-e_2}}\,\frac{\sigma_2 u_0}{\sigma_3 u_0}=\pm\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma_2 u_0}{\sigma_3 u_0},$$

wo wieder das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn $\alpha\lambda$ positiv, das untere, wenn es negativ ist. Ferner findet man

$$\frac{\sigma_2'(u_0+\omega)}{\sigma_2(u_0+\omega)}=\eta+\frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0}+\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_3 u_0}$$

Wendet man dies an, so wird

$$\begin{aligned}
f_3(u_0+\omega)=\pm\Bigg\{&-\frac{8\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{3(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\cdot-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma^2 u_0\,\sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_3^2 u_0}\,\omega\\
&+\frac{2\alpha^2(2-\alpha\lambda)}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\left(\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_3 u_0}+\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_3 u_0}\right)\\
&-\frac{2\alpha^4\lambda^2}{\sqrt{1-\alpha\lambda}(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^7}\left(\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^6}{\alpha^3\lambda^3}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_2 u_0}{\sigma_3 u_0\,\sigma_3 u_0\,\sigma_3 u_0}+\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0\,\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0\,\sigma_2 u_0}\right)\\
&+\frac{8\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\cdot-\frac{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}{\alpha\lambda}\,\frac{\sigma^2 u_0\,\sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_3^2 u_0}\left(\eta+\frac{4\sqrt{1-\alpha\lambda}}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^2}\,\frac{\sigma u_0\,\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0\,\sigma_3 u_0}\right)\Bigg\}\\
=\pm\Bigg\{&\frac{8\alpha(2-\alpha\lambda)}{3\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5}\,\omega\,\frac{\sigma^2 u_0\,\sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_3^2 u_0}-\frac{8\alpha}{\lambda(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^3}\,\eta\,\frac{\sigma^2 u_0\,\sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\,\sigma_3^2 u_0}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$= \pm \frac{4a}{\lambda(1+\sqrt{1-a\lambda})^3} \frac{\sigma^2 u_0\, \sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\, \sigma_3^2 u_0} \left\{ \frac{2(2-a\lambda)}{3(1+\sqrt{1-a\lambda})^2}\,\omega - 2\eta \right\}$$

$$= \mp \frac{4a}{\lambda(1+\sqrt{1-a\lambda})^3} \frac{\sigma^2 u_0\, \sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\, \sigma_3^2 u_0} \left\{ 2\eta - e_1\omega \right\}.$$

Es lässt sich beweisen, dass $2\eta - e_1\omega$ negativ ist und höchstens gleich 0 werden kann. Man bildet

$$\frac{\partial(2\eta - e_1\omega)}{\partial a\lambda} = \frac{16 - 16a\lambda + a^2\lambda^2}{18a\lambda(1-a\lambda)(1+\sqrt{1-a\lambda})^2}\,\omega - \frac{2 - a\lambda - 6\sqrt{1-a\lambda}}{6a\lambda(1-a\lambda)}\,\eta$$

$$+ \frac{2-a\lambda}{6a\lambda(1-a\lambda)}\,\eta - \frac{(2-a\lambda-6\sqrt{1-a\lambda})(2-a\lambda)}{18a\lambda(1-a\lambda)(1+\sqrt{1-a\lambda})^2}\,\omega - \frac{2a\lambda}{3\sqrt{1-a\lambda}(1+\sqrt{1-a\lambda})^4}\,\omega$$

$$= -\frac{2 - a\lambda - 6\sqrt{1-a\lambda}}{3a\lambda\sqrt{1-a\lambda}(1+\sqrt{1-a\lambda})^2}\,\omega + \frac{1}{a\lambda\sqrt{1-a\lambda}}\,\eta$$

$$= \frac{1}{a\lambda\sqrt{1-a\lambda}}(\eta + e_2\omega).$$

Es ist schon früher gezeigt, dass $\eta + e_2\omega$ in dem ganzen Intervalle von $a\lambda = 0$ bis $a\lambda = 1$ positiv ist und erst am Ende den Wert 0 annimmt. Es ist daher der Differentialquotient von $2\eta - e_1\omega$ stets positiv, und $2\eta - e_1\omega$ wächst stetig, wenn $a\lambda$ von 0 bis 1 wächst. Am Ende des Intervalles ist es gleich 0, also im ganzen Intervalle negativ. $f_3(u_0 + \omega)$ ist daher positiv mit Ausnahme der Fälle $u_0 = 0$ und $u_0 = \omega$, welche schon besonders behandelt sind, und $a\lambda = 1$, der, wie später gezeigt werden soll, den Cylinder liefert. In diesen Fällen ist $f_3(u_0 + \omega) = 0$.

Ferner lässt sich zeigen, dass $f_3(u_0 + 2\omega)$ wieder negativ ist mit Ausnahme der eben erwähnten Fälle. Es ist

$$\frac{\sigma(u_0 + 2\omega)}{\sigma_2(u_0 + 2\omega)} = -\frac{\sigma u_0}{\sigma_2 u_0}$$

$$\frac{\sigma_1(u_0 + 2\omega)}{\sigma_2(u_0 + 2\omega)} = -\frac{\sigma_1 u_0}{\sigma_2 u_0}$$

$$\frac{\sigma_3(u_0 + 2\omega)}{\sigma_2(u_0 + 2\omega)} = \frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}$$

$$\frac{\sigma_2'(u_0 + 2\omega)}{\sigma_2(u_0 + 2\omega)} = 2\eta + \frac{\sigma_2' u_0}{\sigma_2 u_0},$$

also

$$f_3(u_0 + 2\omega) = -\frac{8a^2(2-a\lambda)}{3(1+\sqrt{1-a\lambda})^7} \frac{\sigma^2 u_0\, \sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\, \sigma_3^2 u_0}\, 2\omega$$

$$+ \frac{8a^2}{(1+\sqrt{1-a\lambda})^5} \frac{\sigma^2 u_0\, \sigma_1^2 u_0}{\sigma_2^2 u_0\, \sigma_3^2 u_0}\, 2\eta$$

$$= \frac{8\alpha^3}{(1+\sqrt{1-\alpha\lambda})^5} \frac{\sigma^2 u_0 \, \sigma_1^2 u_0}{\sigma_3^2 u_0 \, \sigma_2^2 u_0} (2\eta - e_1 \omega).$$

Da $2\eta - e_1\omega$ stets negativ ist, so ist $f_3(u_0 + 2\omega)$ auch stets negativ, das heisst, $f_3(u)$ wird mindestens einmal zwischen den Werten $u_0 + \omega$ und $u_0 + 2\omega$ gleich 0.

Die einfachste Fläche liefert der Grenzfall $\alpha\lambda = 1$. Für diesen Fall wird $e_2 = e_3$, und man erhält

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \frac{\pi}{6}.$$

Es ist dann

$$\sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{1}{8}u^2}$$

Daraus folgt

$$\sigma_2' u = \tfrac{1}{8} u e^{\frac{1}{8}u^2},$$

also

$$x = \beta + \frac{5}{3\lambda} u + \frac{1}{3\lambda} u = \beta + \frac{2}{\lambda} u$$

$$y = \alpha = \frac{1}{\lambda}.$$

Der konjugierte Punkt zu $u_0 = 0$ ist der zu $u = 2\omega = \pi$ gehörige Punkt. Es ist die x-Koordinate

$$x = \beta + \frac{2}{\lambda}\pi.$$

Die Entfernung der beiden Punkte beträgt daher $\frac{2\pi}{\lambda}$. Da $\frac{1}{\lambda}$ der Radius der Endkreise ist, welche hier gleich sein müssen, so ist also die Entfernung der konjugierten Punkte von einander gleich dem Umfange des Endkreises. Die Oberfläche eines Cylinders ist daher solange bei gegebenem Körperinhalt und bei festgehaltenen Endflächen ein Minimum, als die Höhe des Cylinders kleiner ist, als der Umfang des Grundkreises.

Es ist nun von Interesse, die hier auf rein mathematischem Wege gefundenen Resultate mit den Plateau'schen Experimenten zu vergleichen. Da ist zunächst zu bemerken, dass Plateau nur den Fall untersucht hat, wo der Rotationskörper eine zur Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene besitzt, wo also die beiden begrenzenden Kreise gleichen Radius haben. Es kann daher nur dieser Fall mit den Resultaten der Rechnung verglichen werden. Was den Cylinder anbetrifft, so steht das für diesen Fall auch theoretisch abgeleitete Ergebnis von Plateau, dass die Länge des Cy-

linders den Umfang des Endkreises nicht übertreffen darf, in vollkommener Uebereinstimmung mit der obigen Rechnung.

Auch für den Fall des Unduloids, dessen Mitte von einer Ausbauchung eingenommen wird, ist das Resultat der Rechnung dasselbe, wie das der Beobachtung, dass nämlich die Stabilität nur für den Teil zwischen zwei aufeinander folgenden Minimalwerten des y vorhanden ist. Wenn die Mitte des Unduloids von einer Einschnürung gebildet wird, so zeigt die Untersuchung, dass man nicht immer bis zu zwei Maximalwerten von y gehen darf, sondern nur für Unduloide, welche sich einem Cylinder nähern. Für Unduloide, die über ein bestimmtes Mass vom Cylinder abweichen, für welche $\alpha\lambda < 0{,}83072$ ist, liegen die Grenzen diesseits der Maximalwerte von y. Auch dies Resultat stimmt, soweit man vergleichen kann, mit den Plateau'schen Versuchen überein.

Etwas anders gestaltet sich die Sache für ein Nodoid. Die obigen Rechnungen, deren Resultate von dem Zeichen von $\alpha\lambda$ garnicht abhängen, liefern für den Fall, wo die Mitte des Rotationskörpers von einer Ausbauchung eingenommen wird, ebenfalls als Grenzen zwei aufeinander folgende Minimalwerte des y. Denkt man sich einen solchen Körper wirklich dargestellt, so wird er auf beiden Seiten die Grenzkreise überragen, und seine Begrenzung wird senkrecht auf den Ebenen der Grenzkreise stehen. Plateau hat einen solchen Körper nicht darstellen können. Er hat einen Teil des Nodoids zwischen zwei gleichen Kreisen, als Ölmasse in Alkohol schwebend, verwirklicht und durch Nähern der beiden Kreise die Grenzen der Stabilität zu bestimmen versucht. Dabei zeigte sich nun, dass er keinen Körper erhalten konnte, der teilweise über die Grenzkreise hinausging, indem schon vorher das Öl die Grenzen der Scheiben überschritt und sich zum Teile auf der äusseren Seite derselben ausbreitete. Dies erklärt aber auch zur Genüge, warum Theorie und Experiment in diesem Falle nicht übereinstimmen.

Der Fall, wo die Mitte des Körpers von einem Minimum von y gebildet wird, ist hier besonders eigentümlich. Wenn man einen Körper annimmt, der die Rotationsachse im Innern enthält und von der Rotationsfläche begrenzt wird, so kann man von einem solchen Körper nur ein Stück zwischen dem Minimalwerte von y und denjenigen Werten, wo die Tangente an die Kurve senkrecht zur Rotationsachse steht, darstellen. Dieses Stück muss in gewissen Fällen stabil sein, besonders wenn die Oberfläche des ganzen Körpers zwischen zwei Maximalwerten des y ein Minimum ist. Dies bestätigt sich auch durch das Experiment.

Ein besonderes Interesse hat noch der Fall, wo der durch Ro-

tation der ganzen Schleife erhaltene Körper dargestellt wird. Dieser Körper müsste allerdings in einer Reihe von Fällen stabil sein, während er nach den Plateau'schen Versuchen nicht stabil ist, doch tritt hier der Umstand ein, dass die Flüssigkeit sich auch jenseits des begrenzenden Ringes ausbreiten kann, sodass dann der eine Grenzkreis, auf welchen sich hier die im allgemeinen Falle auftretenden zwei Kreise reducieren, nicht mehr als fest anzusehen ist, was für die Rechnung wesentlich ist.

Die oben abgeleiteten mathematischen Formeln geben die Möglichkeit, für jeden einzelnen Fall die Grenzen, zwischen welchen ein Minimum vorhanden ist, numerisch zu bestimmen. Wenn man einen Körper hat, für welchen man die Werte von α und λ kennt, so hat man, wenn man u_0 einen bestimmten Wert beilegt, eine allerdings komplicierte Gleichung nach u numerisch aufzulösen, was man immer so genau, wie man will, ausführen kann. Auch der Fall, wo der Körper eine zur Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene besitzen soll, lässt sich auf diese Weise erledigen. Dabei braucht man nur als Mitte einen Minimalwert von y zu nehmen, da für einen Maximalwert von y als Mitte eine ganz allgemeine Lösung gefunden ist. Da der Minimalwert von y für $u = 0$ eintritt, so ist nur $u_0 = -u$ zu setzen. Dann hat man ebenfalls für jede gegebene Meridiankurve eine Gleichung $\Theta(u, -u)$ aufzulösen.

Druckfehler in den Formeln.

Seite 7 Zeile 2 v. u. letzter Buchstabe $\bar{q}$ statt q.

„ 14 „ 10 v. o. muss es heissen l_0 statt l^0.

„ 17 „ 12 „ „ „ „ „ ∂u^2 statt ∂n^2.

„ 17 „ 16 „ „ „ „ „ $-27g_3^2$ statt $-27g_2^3$.

„ 19 „ 1 „ „ fehlt die Klammer vor $1+\sqrt{1-\alpha\lambda}$ im Zähler.

„ 20 „ 13 „ „ muss es heissen $\alpha^2\lambda^2$ statt $\alpha^2\lambda^3$..

„ 21 „ 6 „ „ im Nenner $\sigma_2 u$ statt $\sigma_2' u$.

„ 22 „ 1 v. u. im ersten Zähler fehlt 6 vor $\sqrt{1-\alpha\lambda}$.

„ 24 „ 17 v. o. gehört das — Zeichen vor 16 statt vor den Bruch.

„ 26 „ 1 „ „ im Zähler des 2. Bruches α^2 statt α.

„ 28 „ 2 v. u. muss es heissen $\sigma_2' u$ statt σ_2'.

„ 29 „ 10 v. o. „ „ „ — „ =

„ 32 „ 4 v. u. im Nenner ist wegzulassen $)^2$.

„ 35 „ 12 v. o. muss es heissen $\alpha^2\lambda^2$ statt $\alpha^9\lambda^2$.

„ 38 „ 5 v. u. im Zähler $\sqrt{1-\alpha\lambda}$ statt $\sqrt{2-\alpha\lambda}$.

Lebenslauf.

Am 11. Februar 1862 wurde ich, Gustav Hormann, zu Elsfleth im Grossherzogtum Oldenburg geboren. Meine Schulbildung erhielt ich auf der Realschule I. O. zu Goslar, welche ich Ostern 1881 mit dem Zeugnisse der Reife verliess. Um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren, bezog ich die Universität Göttingen, setzte meine Studien von Ostern 1882 bis Ostern 1883 in Berlin fort und studierte darauf bis Ostern 1884 wieder in Göttingen. Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen bei fogenden Herren Professoren und Dozenten

in Göttingen:

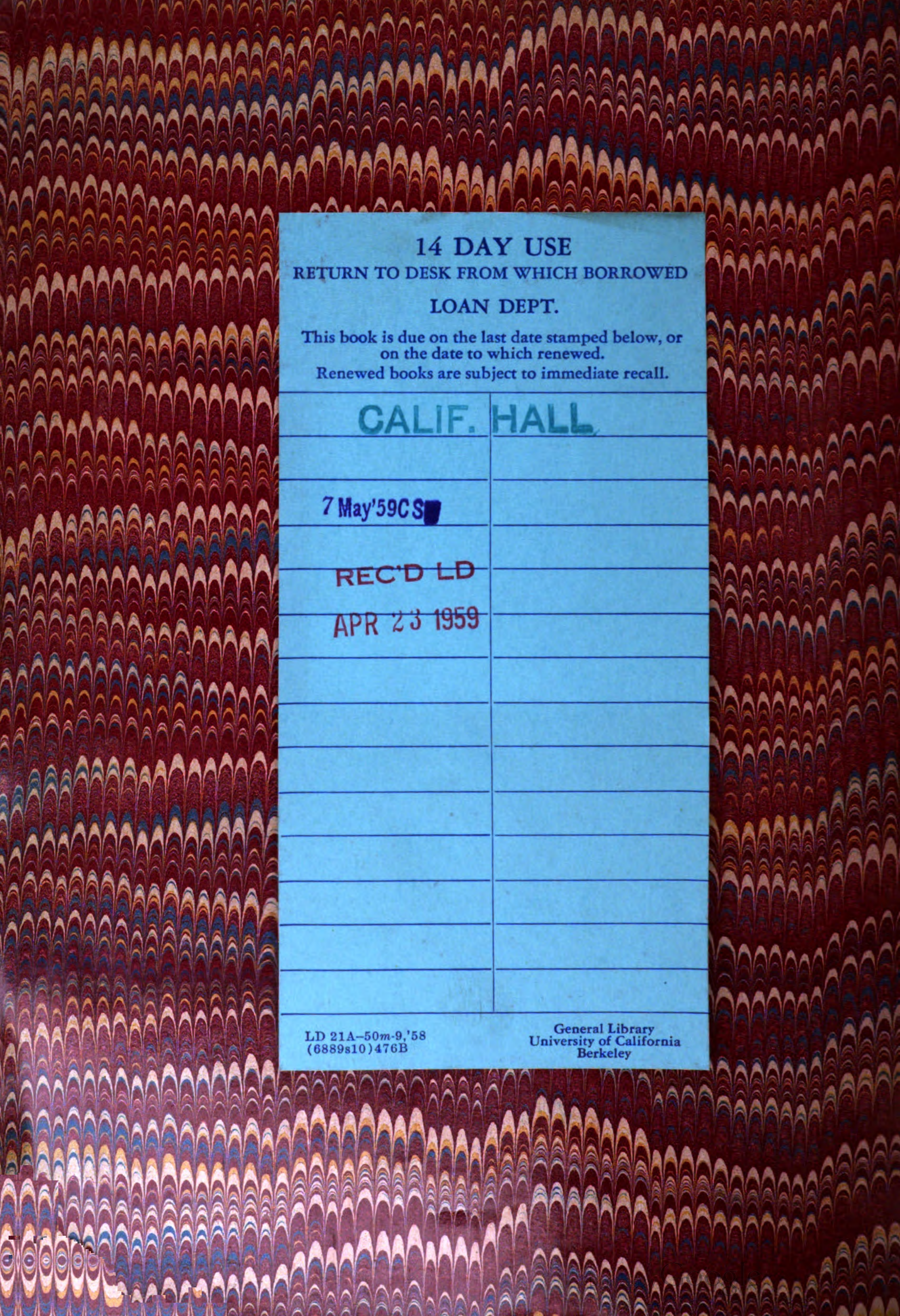
Baumann, Ehlers, Hettner, Hurwitz, Klein, Klinkerfues, G. E. Müller, Reinke, Riecke, H. A. Schwarz, Stern;

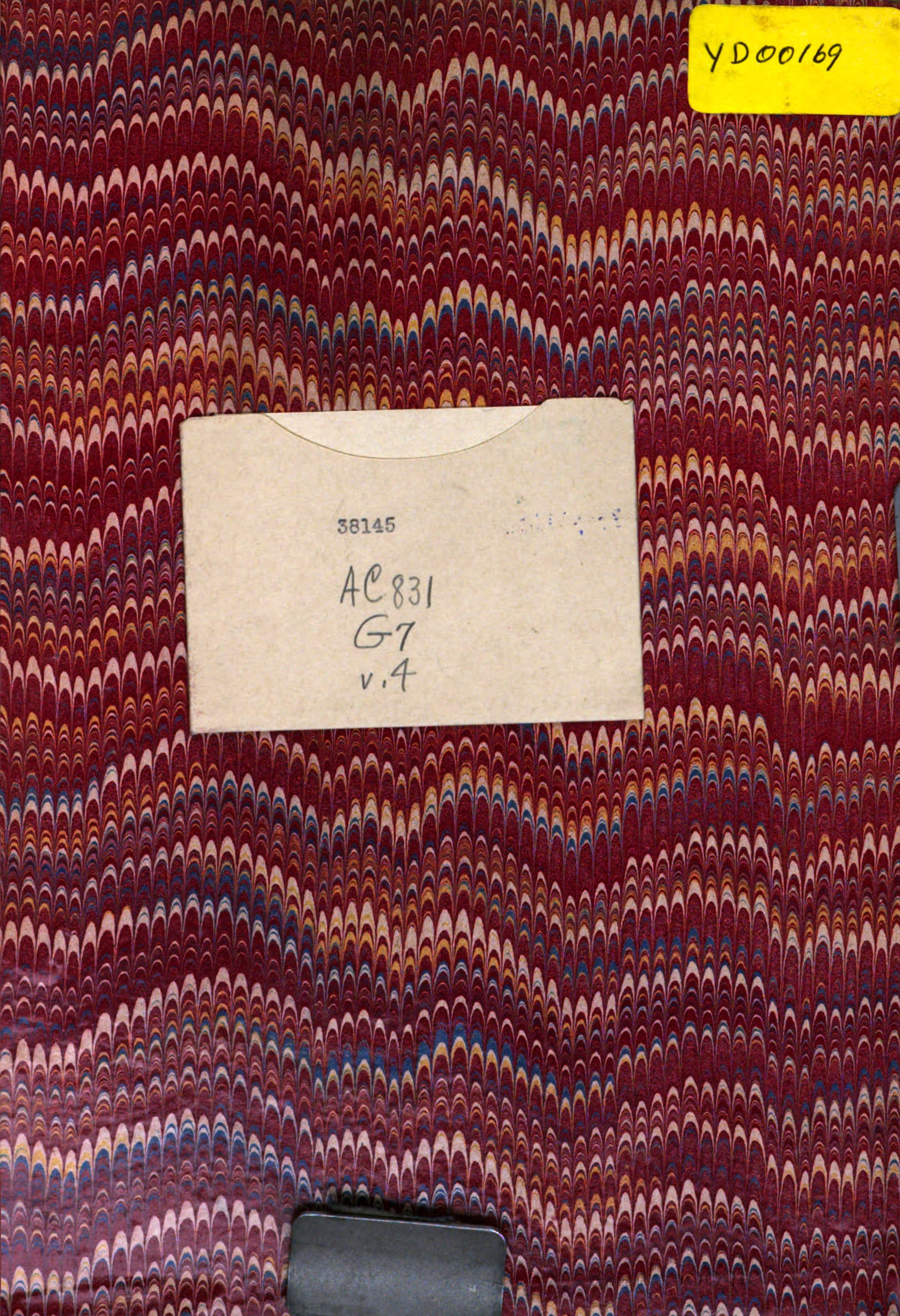
in Berlin:

Du-Bois-Reymond, v. Helmholtz, Hettner, Kirchhoff, Lasson, Lehmann-Filhés, Tietjen, Wangerin, Weierstrass.

Allen diesen meinen hochverehrten Herren Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank aus.

Am 20. Juni 1885 bestand ich das Examen pro fac. doc. vor der Königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission zu Göttingen, absolvierte das pädagogische Probejahr am Realgymnasium mit Gymnasium zu Goslar von Ostern 1885 bis dahin 1886 und bin daselbst seitdem noch als wissenschaftlicher Hilfslehrer beschäftigt.




YD00169
38145
AC831
G7
v.4

